ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

NRD
(Nucleo di Ricerca
in Didattica della Matematica)

La Matematica

e la sua Didattica

Anno 32, n. 2, 2024

Rivista di ricerca in Didattica della Matematica fondata nel 1987

ISSN 1120-9968 - Periodico semestrale - n. 2 - Ottobre 2024

ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

NRD
(Nucleo di Ricerca
in Didattica della Matematica)

La Matematica

e la sua Didattica

Anno 32, n. 2, 2024

Rivista di ricerca in Didattica della Matematica fondata nel 1987

ISSN 1120-9968 - Periodico semestrale - n. 2 - Ottobre 2024

In copertina:
Logo dell'Università di Bologna, concesso alla rivista *La Matematica e la sua Didattica* nell'anno 2000 (anno 14° dalla fondazione della rivista).
Logo del NRD (Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica) fondato nel 1984, attivo presso il Dipartimento di Matematica dell'Università di Bologna.

Rivista di ricerca in Didattica della Matematica,
fondata nel 1987 da Bruno D'Amore,
direttore scientifico dal 1987 al 2021.

Gli Autori sono tenuti a inviare articoli già redatti secondo le regole della rivista, pena la non accettazione dell'articolo. Le norme redazionali si trovano su:

https://rsddm.dm.unibo.it/la-rivista-la-matematica-e-la-sua-didattica
http://www.incontriconlamatematica.org/ita/rivista.php

Gli articoli inviati alla rivista vengono sottoposti anonimi al giudizio di due esperti conosciuti solo al direttore; in caso di valutazioni differenti, vengono mandati a un terzo esperto.

Los artículos presentados a la revista son enviados anónimos a dos árbitros expertos conocidos sólo al director; en caso de diferentes evaluaciones, se envían a un tercer arbitro experto.

The articles submitted to the journal are anonymously reviewed by two experts known only by the editor-in-chief; in case of different evaluations they will be sent to a third expert.

Proprietà Direzione Amministrazione Redazione:
NRD (Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica) del Dipartimento di Matematica dell'Università di Bologna

Periodico semestrale, autorizzazione del Tribunale di Bologna n. 6219 del 13/09/1993
ISSN 1120-9968

Scientificità riconosciuta ANVUR

La rivista *La Matematica e la sua Didattica* è semestrale ed esce nei mesi di aprile e ottobre.

La rivista è open access, si scarica gratuitamente dai seguenti siti:
https://site.unibo.it/rsddm-dm/it/rivista
http://www.incontriconlamatematica.org/ita/rivista.php

La Matematica e la sua Didattica

NRD Università di Bologna, Italia.

Indice

La Influencia de las Creencias y Concepciones del Docente de Matemáticas en el Desarrollo de una Enseñanza Inclusiva de las Matemáticas

The Influence of the Mathematics Teacher's Beliefs and Conceptions on the Development of Inclusive Teaching in Mathematics

L'influenza delle Convinzioni e delle Concezioni degli Insegnanti di Matematica sullo Sviluppo di un Insegnamento Inclusivo della Matematica

Angélica Lorena Garzón Muñoz pp. 169–188

Manipolazione Algebrica e Disabilità Visive: Tre Studi di Caso a Confronto

Algebraic Manipulation and Visual Impairments: Comparing Three Case Studies

Manipulación Algebraica y Discapacidades Visuales: Comparando Tres Estudios de Caso

Silvia Regola, Andrea Maffia e Carola Manolino pp. 189–208

You Need a Map to Navigate a Teacher Education Programme: Analyzing the InformalMath Project through Conjecture Mapping

Serve una Mappa per Navigare un Programma di Formazione Insegnanti: L'analisi del Progetto InformalMath attraverso il Conjecture Mapping

Se Necesita un Mapa para Navegar un Programa De Formación de Profesores: Analizar el Proyecto InformalMath mediante el Conjecture Mapping

Raffaele Casi and Marzia Garzetti pp. 209–233

RECENSIONI E PREFAZIONI

Godino, J. D. (2024). *Enfoque Ontosemiótico en Educación Matemática: Fundamentos, Herramientas y Aplicaciones*. McGraw-Hill.

Recensione di Bruno D'Amore pp. 237–245

Peres, E., & Siminovich, S. (2024). *L'Armonia dei Numeri Primi: Giochi Matematici e Nuove Simmetrie Creative*. Dedalo.

Recensione di Bruno D'Amore pp. 246–247

D'Amore, B. (2024). *Arte, Matematica, Futurismo: Un Racconto tra Scienza e Pittura da Giacomo Balla a Oggi*. Pendragon.

Prefazione di Piergiorgio Odifreddi pp. 248–250

La Influencia de las Creencias y Concepciones del Docente de Matemáticas en el Desarrollo de una Enseñanza Inclusiva de las Matemáticas

The Influence of the Mathematics Teacher's Beliefs and Conceptions on the Development of Inclusive Teaching in Mathematics

L'influenza delle Convinzioni e delle Concezioni degli Insegnanti di Matematica sullo Sviluppo di un Insegnamento Inclusivo della Matematica

Angélica Lorena Garzón Muñoz
Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia

Resumen. *A nivel cultural existe la creencia que la enseñanza de las matemáticas presenta una complejidad especial, por ello muy pocos logran alcanzar los objetivos de aprendizaje planteados en las aulas, más aún si muchos de ellos presentan dificultades de aprendizaje. En el presente artículo se realiza una revisión teórica identificando la influencia de las creencias y concepciones del docente de matemáticas que impiden o posibilitan un proceso de inclusión asociado al desarrollo del conocimiento matemático. Se presenta como resultado una caracterización de la enseñanza inclusiva de las matemáticas basada en una interpretación optimista y positiva del proceso de inclusión donde se logran avances en el aprendizaje de las matemáticas a partir del desarrollo de estrategias, concepciones renovadas y reflexiones que nos presentan una serie de investigaciones.*

Palabras clave: enseñanza inclusiva de las matemáticas, creencias, concepciones, inclusión, creencias y concepciones del docente de matemáticas.

Abstract. *At a cultural level, there is a belief that the teaching of mathematics presents a particular complexity; such belief may boost that only some learners manage to achieve the learning objectives set in the classrooms; it could be even more challenging if many of those learners have learning difficulties. In this article, a theoretical review is carried out to identify the influence of the mathematics teacher's beliefs and conceptions that prevent or enable an inclusion process associated with the development of mathematical knowledge. The result is a characterization of the inclusive teaching of mathematics based on an optimistic interpretation of the inclusion process, where progress is achieved in mathematics learning from strategies developments, renewed conceptions, and reflections that present a series of investigations.*

Keywords: inclusive teaching of mathematics, beliefs, conceptions, inclusion, math teachers' beliefs and conceptions.

Sunto. *A livello culturale si ritiene che l'insegnamento della matematica presenti una complessità particolare, motivo per cui pochissimi riescono a raggiungere gli obiettivi di apprendimento prefissati nelle aule, a maggior ragione se molti di loro presentano difficoltà di apprendimento. In questo articolo viene effettuata una revisione teorica, identificando l'influenza delle convinzioni e delle concezioni dell'insegnante di matematica che impediscono o consentono un processo di inclusione associato allo sviluppo della conoscenza matematica. Il risultato è una caratterizzazione dell'insegnamento inclusivo della matematica basata su un'interpretazione ottimistica e positiva del processo di inclusione in cui si ottengono progressi nell'apprendimento della matematica dallo sviluppo di strategie, concezioni rinnovate e riflessioni che presentano una serie di indagini.*

Parole chiave: didattica inclusiva della matematica, credenze, concezioni, inclusione, credenze e concezioni dell'insegnante di matematica.

1. Sobre las Creencias y Concepciones del Docente de Matemáticas

Las creencias son interpretadas como aquellos conocimientos culturales que se han construido a través de experiencias personales y han estado influenciados por una dimensión afectiva, cognitiva y conductual. Este conocimiento puede considerarse probable y poco elaborado ya que no necesariamente depende de la validez de lo que se cree, puede asumir verdades contando con algunos indicios, pruebas, datos o comprobaciones no tan rigurosas, puede no depender del acuerdo o aprobación del otro, y el sujeto puede tener o no consciencia del mismo.

Podemos identificar las creencias pedagógicas indicando que son concepciones que tienen los docentes sobre los diferentes procesos de enseñanza, aprendizaje:

> Son personales, reconstruidas sobre los conocimientos pedagógicos históricamente elaborados y transmitidas a través de la formación y en la práctica pedagógica. Por lo tanto, son una síntesis de conocimientos culturales y de experiencias personales. (Vincenzi, 2009, p. 90)

Vicente (1995) reconoce 3 significados descritos en Bohórquez (2016): en primer lugar, reconoce un sentido amplio, impreciso, que incluye a cualquier tipo de conocimiento o noticia. En lugar de "yo pienso" suele decirse frecuentemente "yo creo" (Vicente, 1995, p. 13). En segundo lugar, se establece la creencia como el conocimiento del que no tenemos plena evidencia ni certeza; pero que es compatible con un saber probable, basado en algunos indicios o pruebas razonables. Finalmente, un tercer significado de "creer" todavía más estricto, según Vicente (1995), es aquel asociado a confiar en alguien; prestar nuestro crédito a otras personas “a las que creemos”. En este sentido, “creer” significa asentir, aceptar como verdadero aquello que se nos comunica.

A diferencia de las creencias las concepciones se interpretan como esa parte del conocimiento a nivel cognitivo que es consciente por parte del sujeto y le permite darle validez a lo que se conoce a través de argumentos más elaborados, que no se basan únicamente en experiencias personales influenciadas por lo afectivo y emocional. Las concepciones se asumen como parte de las creencias como plantean Furinghetti y Pehkonen (2002), Pehkonen (1994), Pehkonen (2006), donde se brinda la posibilidad al sujeto de razonar sobre sus concepciones porque las concepciones serán asumidas como creencias conscientes.

El cambio de creencias y concepciones es aquel proceso asociado al aprendizaje donde el sujeto tiene consciencia de su conocimiento y acciones posibilitando cambios en ellos. Al retomar la propuesta teórica de Bohórquez (2016) se confirma que a partir de los resultados de varias investigaciones (e. g. Bohórquez, 2016; D’Amore & Fandiño-Pinilla, 2004; Hart, 2002; Martínez Silva, 2003; Pehkonen, 2006; Woodcock & Vialle, 2010), existe evidencia de la posibilidad del cambio de concepciones y creencias a partir de los resultados favorables obtenidos.

La importancia de indagar acerca de las creencias y concepciones de los profesores radica tal y como lo plantea (Bohórquez, 2016; Bohórquez & D’Amore, 2018; Donoso et al., 2016; Stipek et al., 2001) en que estas revelan la práctica de enseñanza en el aula del profesor. Se concibe una relación estrecha y directa entre las creencias y concepciones del profesor y su desempeño. Por ejemplo, Jordan et al. (2009) indican que las prácticas de inclusión efectivas, dependen en parte de las creencias de los docentes sobre aspectos relacionados con la inclusión, en particular sobre la naturaleza de la discapacidad, y sobre sus creencias sobre sentirse o no responsables del proceso: “La diferencia entre una inclusión eficaz e ineficaz puede residir en las creencias de los profesores sobre quién tiene la responsabilidad principal de los estudiantes con necesidades educativas especiales” (Jordan et al., 2009, p. 541).

2. Algunas Interpretaciones de la Inclusión en la Educación Matemática

Podemos identificar a partir de una revisión teórica que la inclusión en educación matemática presenta dos intereses por una parte reconocemos la importancia de un proceso social que evite la inequidad en los espacios del desarrollo del conocimiento general y por otra aquellas interpretaciones que enfatizan en la necesidad de incluir a todos los estudiantes en el aula de matemáticas buscando que todos aprendan matemáticas brindando las mismas oportunidades. Como resalta Faragher et al. (2016) la educación inclusiva engloba, pero no es sinónimo de necesidades especiales o dificultades de aprendizaje.

Por ejemplo, López et al. (2020) la inclusión como: “la comprensión de la variedad de producciones que los estudiantes presentan en relación al contenido matemático a desarrollar dada la diversidad de individuos en el aula y las propias cualidades de éstos” (p. 93–94). En el campo educativo Ainscow et al. (2006) indica que inclusión es un proceso de análisis de las culturas, las políticas y las prácticas escolares que busca minimizar o erradicar la no presencia, poco aprendizaje y poca participación de estudiantes en sus escuelas.

Roos (2019) reconoce que el término inclusión en educación matemática se usa tanto para una ideología como para una forma de enseñar. Asumir la inclusión como una ideología implica pensar en los procesos sociales, históricos y legales asociados a una desigualdad de acceso a la educación y asumir la inclusión como una forma de enseñanza implica pensar en desarrollo de estrategias específicas para que en las aulas todos los estudiantes accedan al conocimiento matemático. Como concluye Roos (2019) si se quiere promover el desarrollo sostenible de la inclusión se debe conectar e interrelacionar la operacionalización y los significados de la inclusión tanto en la sociedad como en las aulas de matemática porque es posible que la ideología solo como visión no tenga un impacto real en las aulas.

En cierta manera se trata de buscar un balance entre los desarrollos teóricos asociados a un proceso inclusivo y la forma de enseñanza asociado a los aspectos prácticos. A partir de lo opuesto a la cultura de la exclusión matemática que identifica Louie (2015, 2017), la inclusión en matemáticas puede ser interpretado como aquellos procesos de enseñanza que en educación matemática no limitan el acceso de los estudiantes a experiencias ricas y significativas de aprendizaje permitiéndoles desarrollar identidades como aprendices matemáticamente capaces.

3. La Necesidad de una Enseñanza Inclusiva de las Matemáticas

El interés por desarrollar una enseñanza inclusiva de las matemáticas surge al reconocer prácticas excluyentes en las aulas lideradas por los docentes de matemáticas (Aké et al., 2021; Broitman et al., 2023; Crisol-Moya et al., 2023; Faragher et al., 2016; López et al., 2020; López & Aké, 2015; Louie, 2015, 2017; Nieminen et al., 2023; Roos, 2023; Sullivan, 2015; Vodičková et al., 2023); sin embargo, esto no significa que la responsabilidad recaiga únicamente en los métodos utilizados por el docente, por ejemplo Bishop y Kalogeropoulos (2015) asocian la exclusión con el compromiso de un estudiante en una actividad matemática, es decir un estudiante puede excluirse cuando decide no vincularse a una actividad propuesta y en estos casos quien determina su inclusión es el sujeto.

En cualquiera de las situaciones el docente en búsqueda de una enseñanza inclusiva de las matemáticas podría velar por establecer las condiciones que posibiliten un proceso de inclusión en las clases de matemáticas y ayudar al estudiante en dicho proceso siendo consciente que hay ciertos límites respecto a los resultados. Abordar la diversidad en matemática es un desafío como reconoce Crisol-Moya et al. (2023) principalmente porque las matemáticas siempre han representado dificultad para muchos estudiantes a lo largo del tiempo, su enseñanza ha tenido un énfasis conceptual y desarrollar competencias relacionadas a procesos matemáticos implican procesos.

Se puede identificar a través de varias investigaciones algunas creencias y acciones por parte del docente que fomentan prácticas excluyentes o segregadoras a través de la enseñanza de las matemáticas; por ejemplo considerar que no todos los estudiantes pueden aprender matemáticas, desarrollar consciente o inconscientemente procesos de etiquetado de los estudiantes donde además las estrategias y características de una práctica son diferentes para cierta población, invisibilizar una parte de los estudiantes en las sesiones de clase, y usar ciertas tareas matemáticas para reprender a estudiantes con dificultades convivenciales.

Respecto a la posibilidad de aprender matemáticas por ejemplo a partir de la definición de cultura de la exclusión de la matemática que plantea Louie (2017) se considera a nivel cultural la existencia de procesos de exclusión donde la realidad asume que a pesar de implementar varios métodos de enseñanza solo unos logran y lograrán aprender matemáticas. Valero (2013) reconoce que en los documentos curriculares a nivel internacional se refieren a lo que debería lograr toda la población estudiantil de un país, y tales enunciados efectúan de por sí una categoría de exclusión de todos aquellos que no lograrán lo esperado. Considerar la respuesta a la pregunta ¿Quiénes pueden aprender matemáticas? implicaría asumir una postura frente a un proceso inclusivo y/o excluyente.

Por ejemplo, Filippi y Aravena (2021) consideran que en educación matemática existe la creencia de que el estudiantado con necesidades educativas especiales en matemáticas no posee herramientas cognitivas para construir su propio conocimiento y que solo le aporta a su aprendizaje una enseñanza exigua y procedimental. “Parece que si los maestros creen que es menos probable que los estudiantes aprendan matemáticas, entonces esos estudiantes tienen oportunidades restringidas para aprender” (Sullivan, 2015, p. 245). El manifiesto de CIEAEM (2000) al respecto sostiene que:

> A menudo, padres y alumnos, profesores y políticos todavía asocian las matemáticas con ‘superdotación’, lo que las convierte en una disciplina exclusiva. Esto transforma las matemáticas en un medio particularmente apropiado de selección social que conduce a una creciente aversión y ansiedad…En aras de identificar a los superdotados, se justifica una mayor selección y diferenciación individual en términos de pruebas y se ignoran o descuidan las posibilidades de experiencias de aprendizaje colectivo. Mientras persista un enfoque social en los ‘superdotados’, la mayoría no recibirá la educación adecuada. (Gates & Vistro-Yu, 2003, p. 36)

Algunas de las consecuencias de asumir una concepción excluyente de la enseñanza de las matemáticas no se limitan a las aulas escolares de matemáticas, Volmink (1994), como se citó en Gates y Vistro-Yu (2003), indican que se puede considerar que el conocimiento matemático actúa como un "guardián" del progreso social, por lo que las matemáticas escolares no solo afectan la existencia aquí y ahora de nuestros alumnos, sino también sus perspectivas de futuro. Como señala Louie (2017), el aprendizaje de las matemáticas permite el acceso a oportunidades de aprendizaje intelectualmente estimulantes, y programas educativos prestigiosos, además como afirma Clark et al. (2009), la habilidad matemática se considera "un componente fundamental o representante de la inteligencia" (p. 49), categorizar algunos estudiantes como incapaces de aprender matemáticas implica en muchas ocasiones generalizar la incapacidad de aprender.

El segundo aspecto asociado a una práctica diferenciada al enseñar matemáticas surge desde el reconocimiento que realiza Sullivan (2015) donde es en las matemáticas donde podremos experimentar mayor desafío en torno a la inclusión porque se identifican grandes diferencias en la enseñanza de los estudiantes, de este modo más que el proceso de agrupar estudiantes bajo un criterio, la importancia radica en la razón de dicha diferenciación en la enseñanza.

Bishop y Kalogeropoulos (2015) reconocen el etiquetado de estudiantes como una de la causas de procesos excluyentes en el aula de matemáticas ya que a través del aprendizaje de las matemáticas se fomenta el desarrollo de estereotipos cuando se privilegia la rapidez en el cálculo o en la resolución de problemas, cuando los mismos estudiantes clasifican o categorizan a sus compañeros bajo ciertas etiquetas peyorativas como "aprendizaje lento", "débil", para quienes presentan dificultad para desarrollar el plan de estudios de matemáticas altamente abstracto. Etiquetar a la persona y no a sus comportamientos puede generar autopercepciones negativas que conducen a la desconexión del estudiante con las matemáticas.

Un claro ejemplo lo plantea Brophy (1983) desde el planteamiento de la "profecía autocumplida". Bajo este modelo cíclico primero el docente desarrolla un juicio temprano respecto a los estudiantes, que se ve evidenciado en un comportamiento diferenciado donde el docente comunica sus expectativas a los estudiantes, este comportamiento de manera consciente o inconsciente influye en el concepto de sí mismos, la motivación, las aspiraciones, la conducta de los estudiantes, teniendo como efecto por último que las respuestas de los estudiantes refuercen las expectativas de los docentes. Es decir, el rendimiento de los estudiantes se ve influenciado directamente de las creencias de los docentes sobre si es menos o más probable que aprendan matemáticas.

Haciendo alusión al tercer aspecto Bishop y Kalogeropoulos (2015) reconocen la existencia del fenómeno sobre la invisibilidad de un grupo de estudiantes en las clases de matemáticas. Un primer reto consistiría en identificar las causas de la falta de compromiso del estudiante en clase de matemáticas para evitar que formen parte de esa población que es invisible para el profesor, en muchas ocasiones por su falta de conexión y participación. Al respecto Kong et al. (2003) reconocen que la desvinculación de un estudiante en clase de matemáticas puede estar ligada a tres dimensiones que responde a cómo se siente, actúa y piensa el estudiante (compromiso afectivo, conductual y cognitivo) y ya que el estudiante se desarrolla en un entorno sociocultural, su interacción con el entorno influye directamente en el proceso.

Debido a ello el docente de matemáticas no puede únicamente reconocer la falta de compromiso del estudiante bajo sustentos que emergen del sujeto, es a partir de la relación del estudiante con el entorno e inclusive con el docente donde se puede entablar una lucha que eviten cada una de las causas emergentes de la falta de conexión o interés. La invisibilidad de ciertas poblaciones existe en la enseñanza de las matemáticas y del docente depende entablar mecanismos que revivan ciertas interacciones entre los estudiantes, e inclusive buscar posibilidades si es que se desconocen, para que cierta población no pase desapercibida dentro una enseñanza de las matemáticas.

Por último, el cuarto aspecto hace referencia a la asociación de tareas de matemáticas con medidas disciplinarias, asumir las actividades matemáticas como un castigo no solo influye en la posible percepción que los estudiantes puedan desarrollar de las matemáticas, que definitivamente no serán las mejores, inclusive no solo influye en el compromiso y disfrute de una actividad en matemáticas. El docente esta identificando ciertas actividades matemáticas para un grupo de estudiantes que mantienen un comportamiento de forma ideal, y el uso de otras estrategias o matemáticas para otro grupo de estudiantes que tienen un comportamiento que se sale de lo parámetros esperados por el docente.

Por ejemplo Bishop y Kalogeropoulos (2015), identifican como en una clase de matemáticas el aprendizaje de las matemáticas en forma de repetición como escribir las tablas de multiplicar se utiliza en las aulas de primaria con ciertos estudiantes que se consideran no comprometidos con el desarrollo de las tareas, es decir, cuando el estudiante no logró vincularse con una actividad general, por problemas de conducta, y su tarea consistirá en la resolución de una lista larga de operaciones donde usualmente se plantea una lista de multiplicaciones.

4. Algunas Reflexiones Enfocadas al Desarrollo de una Enseñanza Inclusiva de las Matemáticas

Uno de los factores asociados a la segregación en el aula es la forma de agrupación de los estudiantes en el aula de matemáticas, al respecto (Sullivan, 2015) identifica que la distribución de los estudiantes para aprender matemáticas influye en la equidad y oportunidad y que puede ser un factor influyente tanto como el tipo de enseñanza. Además, en el tipo de distribución emergen causas relacionadas con las creencias del docente para asumir unos estudiantes mejores que otros para aprender matemáticas.

No se trata de elegir un agrupamiento homogéneo o heterogéneo ya que en las dos modalidades influyen diversos factores que pueden impedir un proceso inclusivo; por ejemplo en una distribución homogénea los docentes pueden ignorar la diversidad del aula desde la planificación y proponer algo para todos por igual, o en la agrupación heterogénea el docente puede asumir que debe enseñar diferentes contenidos a diferentes grupos, y como afirma (Sullivan, 2015) lo que no solo aumenta la carga de trabajo de los maestros, sino que destruye cualquier sentido de comunidad en el aula.

Caracterizar una enseñanza inclusiva de las matemáticas implica pensar en el desarrollo de ciertas tareas o desafíos matemáticos, en donde si los maestros no presentan verdaderos desafíos a los estudiantes, esta elección también reduce las oportunidades de aprender. Podemos identificar un ejemplo en Büscher (2019) quien identifica que hay una tendencia a que las tareas en matemáticas para los estudiantes con dificultades de aprendizaje en matemáticas se centren en aritmética elemental.

> Es probable que los profesores que se atribuyen a sí mismos la incapacidad de un alumno para comprender una idea, den más explicaciones y busquen otras formas de explicar la idea difícil. Sin embargo, si los profesores atribuyen el fracaso a la falta de capacidad del alumno o a alguna otra característica, pueden darse por vencidos y pasar al alumno a otra tarea más sencilla, reduciendo así la probabilidad de que el alumno aprenda el contenido previsto. (Sullivan, 2015, p. 246)

Otro elemento asociado refiere al acceso de ciertos contenidos, ya que a pesar que aún los educadores matemáticos se debaten sobre qué aspectos de las matemáticas son importantes o necesarios y cuáles se deben privilegiar, un proceso de inclusión espera que todos los estudiantes estén preparados para aplicar sus conocimientos matemáticos en sus tareas cotidianas. A partir de la propuesta de Sullivan et al. (2010) con el proyecto Task Type and Mathematics Learning (TTML) podemos cuestionarnos sobre cuál de los cuatro tipos de tareas matemáticas posibilitaría una enseñanza inclusiva de las matemáticas.

> Tipo 1: Implica un modelo, ejemplo o explicación que elabora o ejemplifica las matemáticas.
>
> Tipo 2: Sitúa las matemáticas dentro de un problema práctico contextualizado para involucrar a los estudiantes, pero el motivo es explícitamente matemático.
>
> Tipo 3: Implica tareas abiertas que permiten a los estudiantes investigar contenido matemático específico.
>
> Tipo 4: Implica investigaciones interdisciplinares en las que es posible evaluar el aprendizaje en dominios matemáticos y no matemáticos. (p. 134)

Al respecto Sullivan et al. (2010) argumenta que es más probable que los estudiantes aprendan matemáticas cuando trabajan en problemas que aún no pueden resolver, en lugar de solo practicar rutinas que ya conocen. Si los maestros no presentan desafíos a los estudiantes de bajo rendimiento, esto también reduce sus oportunidades de aprender. Buró y Prediger (2019) reconoce en las tareas de indagación abierta una herramienta poderosa en el desarrollo de aulas matemáticas inclusivas, a través de una buena gestión y habilidad docente, ya que considera que a partir de la solución surge un proceso de diferenciación natural.

Muestra de ello es el enfoque de enseñanza que describe Scherer et al. (2016) donde se potencia el proceso de diferenciación natural, que consiste en que las tareas abiertas con una entrada baja y un techo alto brindan el potencial para la diferenciación natural si permiten múltiples representaciones, diversas vías de solución y diferentes actividades cognitivas a lo largo de la trayectoria de los descubrimientos Scherer y Krauthausen, 2010). La tarea abierta tiene una entrada baja cuando se brinda accesibilidad a todos y el techo alto refiere a que debe estar cargada de un fuerte potencial matemático para cubrir todo el desafío, estrategia que permite llegar a todos los estudiantes sin enfocarnos a solo un grupo de ellos.

Ahora bien; la elección del tipo de tarea es definitivo dentro del proceso inclusivo, pero la gestión y posibles adaptaciones que el docente debe realizar para que suscite una solución por parte de todos los estudiantes implica aún otros retos para el docente de matemáticas. Tzur (2008) diferencia dos formas por la que los docentes de matemáticas modifican las tareas: la primera cuando en la etapa de planificación se anticipan y reconocen que dicha tarea no posibilita el desarrollo de los objetivos y segundo una vez durante la marcha cuando reconocen que las respuestas de los estudiantes no son las previstas.

Büscher (2019) señala como a partir del diseño de tareas el profesor realiza un proceso de diferenciación señalando dos formas; la primera cuando los estudiantes con dificultades en el aprendizaje de las matemáticas pueden necesitar tareas conceptualmente ricas para contenido diferente al de otros estudiantes (contenido diferenciado) y otra debido a que se considera que necesitan tareas que realmente puedan cumplir (acceso diferenciado). En este proceso de adaptación se corren ciertos riesgos, uno de ellos que señala Büscher (2019) es que a partir del desarrollo de contenido diferenciado se puede alienar a los estudiantes con dificultades. Además, en el proceso de adaptación se puede reducir el potencial de la tarea debido a una falta de confianza matemática por parte de los docentes, como identifica Sullivan et al. (2010) por ejemplo al trabajar en un contexto numérico más cómodo.

Podemos reconocer la complejidad en la toma de decisiones del proceso de adaptación de tareas para estudiantes con dificultades de aprendizaje en matemáticas debido a un factor de incertidumbre ya que el docente no tiene la certeza de qué es mejor para el estudiante, por una parte debe evitar estrategias de contenido diferenciado, buscando no privar al estudiante de cierto conocimiento y mantener bajas expectativas, pero además debe brindar las oportunidad para que el estudiante pueda desarrollar dichas tareas. Sin embargo;

investigaciones como la de Buró y Prediger (2019) muestran que los estudiantes con dificultades en el aprendizaje de las matemáticas pueden alcanzar más de lo esperado si se les brinda un apoyo receptivo y proactivo (Peltenburg, 2012), reconociendo la necesidad de una preparación por parte de los docentes para asumir dichos desafíos. Además, como reconoce Broitman et al. (2023):

> Algunas investigaciones didácticas, experiencias de aula y materiales curriculares de los últimos años … (Broitman et al., 2015; Escobar y Broitman, 2016; Cobeñas y Grimaldi, 2018) señalan que es posible incluir a todos los alumnos en el aula de Matemática tanto si se les propone la misma actividad como si trabajan sobre problemas diferentes con una cierta pauta compartida. (Broitman et al., 2023, p. 23)

5. Características de una Enseñanza Inclusiva de las Matemáticas

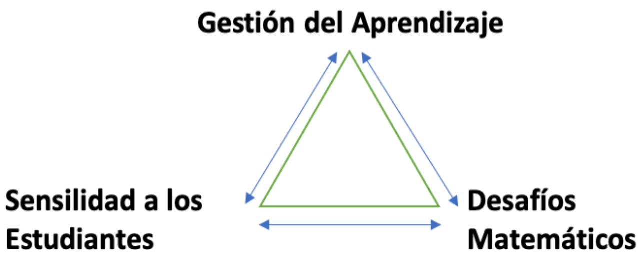
Al reconocer algunas de las acciones y creencias de los docentes que fomentan prácticas excluyentes en la enseñanza de las matemáticas, surge el interés por identificar entonces las características de una enseñanza inclusiva de las matemáticas. Al respecto Sullivan (2015) describe un modelo de enseñanza basado en 5 elementos para abordar las diferencias en la preparación de los estudiantes: Experiencias de aula comunitaria, trayectoria de tareas matemáticas, habilitar condiciones que se plantean para involucrar a los estudiantes que presentan dificultades, anticipar que algunos estudiantes pueden avanzar, pensando en tareas complementarias que amplíen y ser explicito sobre las pedagogías de las enseñanzas de las matemáticas.

Como señala Sullivan (2015) cada una de las estrategias por sí solas no parecieran tener efectos llevaderos en la práctica, se trata de vincular las actividades parte de un proceso que de manera única y aislada no tendría efectos duraderos, “Una mera combinación de actividades pedagógicas interesantes puede ser inclusiva y atractiva por un tiempo, pero a menos que exista una estructura general para la pedagogía, no tendrá éxito a largo plazo” (Bishop y Kalogeropoulos, 2015, p. 211).

Pensar en una enseñanza inclusiva de las matemáticas implica pensar en cómo vincular todos los aspectos sin considerar tareas y estrategias aisladas unas de otras, sin descuidar un desarrollo convivencial y una inclusión social, pero también sin dejar que el aprendizaje de las matemáticas quede en segundo plano. Todos los aspectos desarrollados en conjunto, nos permiten identificar en la propuesta de la triada de la enseñanza de las matemáticas (Figura 1) de Jaworski y Potari (1998) a través del concepto de armonía una caracterización importante que permite desarrollar un vínculo dinámico entre la teoría y la práctica, además de vinculación y dependencia entre el desarrollo social y cognitivo. A continuación, se describen los tres dominios que están estrechamente interrelacionados (Figura 1) y son interdependientes descritos en Potari y Jaworski (2002).

Figura 1

Triada de Jaworski y Potari (1998)



Gestión del aprendizaje: Describe el papel del maestro en la constitución del entorno de aprendizaje del aula por parte del maestro y los estudiantes. Incluye ubicación de grupos de aula; planificación y organización de tareas y actividades, establecimiento de normas, manejo de toda la situación de clase, posibles respuestas a participaciones anticipadas de estudiantes, desarrollo de habilidades sociales dentro del entorno del salón de clases y su creación de oportunidades para participar en las matemáticas. La gestión del aprendizaje funciona en dos planos en este tipo de enseñanza: en el primer plano es la interacción real con el alumno individual; en un segundo plano es la coordinación de diferentes acciones y decisiones que permitan al profesor atender las distintas necesidades de todos los alumnos de la clase.

Sensibilidad a los estudiantes: Describe el conocimiento del profesor sobre sus estudiantes y la atención a sus necesidades; las formas en que el maestro interactúa con los individuos y guía las interacciones grupales. Por ejemplo; el modo de presentación de una tarea por parte del docente puede involucrar a los estudiantes, donde valore y anime a otros a valorar las contribuciones de los compañeros. El uso de recursos específicos y contextos buscando que todos puedan comenzar la tarea, ofrecer contextos prácticos y familiares. Preocupación por la autoestima de los estudiantes que se reflejen en acciones que muestren sensibilidad afectiva: Elogiar a los estudiantes, guiar sus acciones, escuchar sus explicaciones.

Las acciones del maestro implican una sensibilidad hacia los estudiantes en los dos sentidos, dominios afectivos y cognitivos, por ejemplo, cuando el profesor crea una trayectoria de alguna manera reduciendo algún desafío para involucrar al estudiante en las ideas, está demostrando una sensibilidad en el dominio cognitivo.

> La sensibilidad cognitiva se refiere a la apreciación y el reconocimiento del pensamiento de los estudiantes, que luego puede desarrollarse aún más mediante el desafío apropiado. La sensibilidad afectiva incluye fomentar las creencias personales de los estudiantes y la valoración de su capacidad para hacer matemáticas y pensar matemáticamente; se refiere al bienestar y la actitud positiva

> de los estudiantes dentro del entorno del aula, y no siempre se conecta obviamente con una dimensión cognitiva. Es posible fomentar un buen ambiente en el aula en el que los estudiantes se sientan felices, confiados y bien motivados, pero no alcancen la calidad de pensamiento matemático de la que son capaces. (Potari & Jaworski, 2002, p. 374)

Desafíos matemáticos: Describe los desafíos que se ofrecen a los estudiantes para generar pensamiento y actividad matemática. Esto incluye tareas establecidas, preguntas planteadas y énfasis en el procesamiento metacognitivo. Como señalan las autoras Potari y Jaworski (2002), el desafío debe evaluarse cuidadosamente para que encaje con los niveles actuales de cognición de los estudiantes. Además, aunque haya cierto grado de adecuación cognitiva, es posible que no se acepte el desafío si la dimensión afectiva no es también adecuada.

Ahora bien, ya que estos tres dominios funcionan de una manera interdependiente donde el desarrollo de uno interviene en el otro, es a partir de la armonía donde el docente puede valorar y al mismo tiempo desafiar el pensamiento matemático de los estudiantes apoyándolos tanto emocionalmente (elogiando, animando.) como cognitivamente (cuestionando, buscando una articulación conceptual más clara). Es decir, los tres elementos de la triada están en armonía cuando:

> El maestro a través de la gestión del aprendizaje crea un ambiente donde la sensibilidad hacia los estudiantes trabaja tanto en los dominios afectivos como cognitivos para hacer el desafío matemático adecuado a las necesidades y el pensamiento de los estudiantes. (Potari & Jaworski, 2002, p. 365)

Es a través del uso de la armonía entre los tres elementos de la triada que se reconoce opciones para que desde la enseñanza de las matemáticas se logre lo que (Potari & Jaworski, 2002, p. 365) denomina prácticas de inclusión efectivas que no difieren de prácticas efectivas en general y están basadas en habilidades de enseñanza que se caracterizan por generar altos niveles de participación de los estudiantes, capacidad de estructurar el aprendizaje a partir de los niveles de comprensión de los estudiantes, donde se concibe una trayectoria cognitiva de orden superior y se alienta constantemente al estudiantes hacia el éxito.

La enseñanza inclusiva de las matemáticas no se considera un estado de perfección absoluta, se considera un proceso constante y continuo en búsqueda de la armonía entre los 3 componentes que propone Jaworski y Potari (1998) respecto a la enseñanza de las matemáticas, como son la gestión del aprendizaje, la sensibilidad a los estudiantes y los desafíos matemáticos. Teniendo en cuenta la triada de Jaworski y Potari (1998) y la revisión teórica desarrollada se infiere unas características y principios de una enseñanza inclusiva que ofrecen al docente la oportunidad de identificar dicha enseñanza a través de su práctica.

Tabla 1

Características de la Enseñanza Inclusiva de las Matemáticas (EIM). [Algunas características planteadas son adaptadas de Jaworski y Potari (1998)]

Sobre la gestión del aprendizaje y desafíos matemáticos	
Característica	**Acciones del docente que fomentan una EIM**
1. La enseñanza inclusiva de las matemáticas va dirigida a toda la población estudiantil independiente de sus diferencias.	• El docente concibe una clase diversa en conjunto, sin descuidar cierta población por atender a otra, no se centra en algunos casos de necesidades particulares que forman parte del aula.
2. En la enseñanza inclusiva de las matemáticas se planifica manteniendo objetivos comunes de aprendizaje.	• El docente planifica y organiza la tarea dirigida a todos los estudiantes tanto el que tiene cierta necesidad educativa especial como el que no. • El docente reconoce que las tareas planteadas a si sean diferentes deben buscar cumplir un objetivo común. • El docente favorece una distribución heterogénea de los estudiantes por grupos en el aula buscando desarrollar objetivos comunes de aprendizaje.
3. En la enseñanza inclusiva de las matemáticas se hace uso de tareas asociadas a resolución de problemas sin que se asocien tareas de menor exigencia a ciertos grupos de estudiantes.	• El docente propone tareas que mantienen objetivos comunes de aprendizaje y posibilitan el aprendizaje para toda la población, aunque la tarea, las estrategias o caminos para llegar a él pueden no ser los mismos. • El docente plantea tareas que no implican una respuesta inmediata, y pueden ser resueltas aplicando varias estrategias. • El docente plantea tareas que permiten la aplicación y transferencia del conocimiento matemático a contextos cotidianos. • El docente plantea tareas que permitan la participación de todos (que incluyan cuestiones con diferente demanda cognitiva).

Sobre la sensibilidad hacia los estudiantes	
4. En la enseñanza inclusiva de las matemáticas se desarrolla una sensibilidad en el dominio cognitivo y afectivo por parte de los líderes del proceso de inclusión.	• El docente reconoce diferentes ritmos de aprendizaje de la matemática, debido a esto promueve la progresión del estudiante (independientemente de su ritmo de aprendizaje) sin conformarse con lo “básico” (Ainscow et al., 2006), evidenciando una sensibilidad hacia el dominio afectivo y cognitivo. • El docente reconoce que en el desarrollo de un aula inclusiva intervienen factores asociados a dinámicas internas, como la ubicación, socialización y apoyos recibidos en el desarrollo de las clases. • El docente tiene en cuenta en su planificación posibles alternativas para que el estudiante comprenda y se atreva a preguntar, interactuar, probar y donde se anime a otros a valorar las contribuciones de sus compañeros. • El docente abre espacios de participación a partir de las relaciones colaborativas entre profesor- estudiante y entre estudiante-estudiante buscando desarrollar en el estudiante confianza, autonomía, identidad y pertenencia. • El docente reconoce que un aula inclusiva de las matemáticas es liderada por el profesor de matemáticas apoyándose en un equipo de trabajo (por ejemplo, utilizando un asesor externo al aula; profesor de apoyo, terapeuta pedagógico…). • El docente reconoce el rol del profesor como el agente que a través de su gestión vela por una armonía entre las interacciones sociales, físicas, de autoconocimiento y de enseñanza de todos los estudiantes partícipes, para que todos los estudiantes accedan al conocimiento matemático a través de un proceso social en el que él también forma parte.

Sobre la justificación del proceso de enseñanza	
5. En una enseñanza inclusiva de las matemáticas se busca que el estudiante aprenda a través de un proceso de socialización.	• El docente en la planificación establece estrategias para que todos los estudiantes tengan la oportunidad de construir e interactuar en grupo. • El docente propone tareas que exigen de un proceso de socialización. • El docente prevé y busca en el planteamiento de tareas, que todos los estudiantes puedan aportar y sentirse útiles en el desarrollo de las mismas.
6. En una enseñanza inclusiva de las matemáticas se valora el proceso de cada estudiante buscando promover la progresión de cada uno, sin compararlo con él de los demás, evitando propiciar un ambiente de competición.	• El docente establece criterios de evaluación individualizados asociados a un objetivo común de aprendizaje. • El docente valora los avances particulares de los estudiantes en el aula. • El docente concibe diferentes trayectorias hipotéticas de aprendizaje para sus estudiantes no una única por la que deben transitar todos. • El docente evita realizar comparaciones entre sus estudiantes a nivel cognitivo y afectivo, donde se resalte los logros obtenidos por unos en comparación con otros.

Sobre la aplicación	
7. Una enseñanza inclusiva de las matemáticas no es un ideal basado en resultados de aprendizaje generalizados, es una búsqueda constante y continua de procesos posible de llevar a la práctica de enseñanza.	• El docente día a día identifica un proceso inclusivo cuando las estrategias de enseñanza posibilitan el acceso al conocimiento matemático por parte de todos los estudiantes. • El docente reconoce un proceso de aprendizaje diferente por parte de los estudiantes, por ello no espera que el éxito de una enseñanza inclusiva dependa del aprendizaje generalizado en un tramo de tiempo específico.

6. Conclusiones

A partir la revisión teórica se describe un proceso donde el docente de matemáticas constantemente se enfrenta a la toma de decisiones en sus aulas, allí se pone en evidencia creencias y concepciones acerca de la enseñanza inclusiva de las matemáticas. Se concluye a partir de los resultados de investigaciones en educación matemática inclusiva la influencia de las creencias y concepciones del docente en el desarrollo de la enseñanza, se sugiere indagar sobre la posibilidad del cambio de concepciones buscando generar avances que permitan su desarrollo en la práctica.

Como se puede evidenciar a través de la caracterización no existe un modelo de enseñanza de las matemáticas único y perfecto con el que se considera se van a obtener resultados de aprendizaje por parte de todos los estudiantes. Se considera importante fortalecer los procesos de formación donde el docente se cuestione sobre si es o no responsable del proceso inclusivo, si se trata de atender a estudiantes con dificultades de aprendizaje o a todo un grupo en general, y cómo vincular un proceso social y académico que permita que el estudiante acceda al conocimiento matemático.

Desarrollar una enseñanza inclusiva de las matemáticas no es un proceso sencillo, como identifican varios autores es común que los docentes experimenten dificultades para adaptar su práctica a la diversidad del aula de matemáticas; sin embargo a través de la interpretación asumida de enseñanza inclusiva de las matemáticas retomando el planteamiento de Jaworski y Potari, (1998), se considera un proceso posible de llevar a la práctica a través de las estrategias implementadas por el docente de matemáticas. Se trata de asumir un proceso constante en donde intervienen varios factores, principalmente las creencias y concepciones de los docentes. Tener mayor claridad sobre un proceso inclusivo al enseñar matemáticas a partir de estrategias y características específicas se puede considerar un avance teórico que posibilita su desarrollo.

Referencias

Ainscow, M., Booth, T., & Dyson, A. (2006). *Improving schools, developing inclusion*. Routledge.

Aké, L., Hernández, J., Ordaz, M., Larios, J., & Parada, S. (2021). Formación de profesores de matemáticas: avances para promover aulas de matemáticas inclusivas. *Investigación e Innovación En Matemática Educativa*, *6*, 1–21. https://doi.org/10.46618/iime.105

Bishop, A., & Kalogeropoulos, P. (2015). (Dis)engagement and exclusion in mathematics classrooms – Values, labelling and stereotyping. In A. Bishop, H. Tan, & T. N. Barkatsas (Eds.), *Diversity in Mathematics Education* (pp. 193–217). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-05978-5_12

Bohórquez, L. (2016). *Cambio de concepciones de estudiantes para profesor sobre su gestion del proceso de enseñanza-aprendizaje en ambientes de aprendizaje fundamentados en la resolución de problemas* [Tesis de doctorado, Universidad Distrital Francisco José de Caldas]. http://hdl.handle.net/11349/5313

Bohórquez, L., & D'Amore, B. (2018). Factores que apoyan o limitan los cambios de concepciones de los estudiantes para profesor de matemática sobre la gestión del proceso de enseñanza-aprendizaje. *Avances de Investigación En Educación Matemática*, *13*, 85–103. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i13.228

Broitman, C., Cobeñas, P., Escobar, M., Grimaldi, V., & Sancha, I. (2023). Un estudio sobre la enseñanza de las matemáticas a alumnos con discapacidad en escuelas de educación especial y común. *Revista Colombiana de Educación*, *87*, 1–30. https://doi.org/10.17227/rce.num86-12080

Brophy, J. E. (1983). Research on the self-fulfilling prophecy and teacher expectations. *Journal of Educational Psychology*, *75*(5), 631–661. https://doi.org/10.1037/0022-0663.75.5.631

Buró, S., & Prediger, S. (2019). Low entrance or reaching the goals? Mathematics teachers' categories for differentiating with open-ended tasks in inclusive classrooms. In U.T. Jankvist, M. Van den Heuvel-Panhuisen, & M. Veldhuis (Eds.), *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 4630–4643). Freudenthal Group & ERME.

Büscher, C. (2019). Conceptual learning opportunities in teachers' differentiated task designs for inclusive mathematics education. In U.T. Jankvist, M. Van den Heuvel-Panhuisen, & M. Veldhuis (Eds.), *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 3604–3611). Freudenthal Group & Erme. https://hal.science/hal-02430044

Comisión Internacional para el Estudio y la Mejora de la Enseñanza de las Matemáticas CIEAEM (2001). Manifiesto 2000 para el año de las matemáticas 50 años de CIEAEM: presente y futuro. En J. Giménez, P. Abrantes, L. Bazzini, Comisión CIEAEM, Grup 100, Ch. Keitel, M. Klakla, J. M. Kreaemer, & S. Romero (Eds.), *Matemáticas en Europa: diversas perspectivas* (Vol. 1, pp. 13–28). Graó.

Clark, L., Johnson, W., & Chazan, D. (2009). Researching African American mathematics teachers of African American students: Conceptual and methodological considerations. In D. B. Martin (Ed.), *Mathematics teaching, learning, and liberation in the lives of Black children* (Vol. 1, pp. 39–62). Routledge.

Cobeñas, P., & Grimaldi, V. (2018). *Construyendo una educación inclusiva II. Aportes para repensar la enseñanza en escuelas para todos*. Asociación Azul de la ciudad de La Plata.

Crisol-Moya, E., Caurcel-Cara, M. J., Peregrina-Nievas, P., & Gallardo-Montes, C. del P. (2023). Future mathematics teachers' perceptions towards inclusion in secondary education: University of Granada. *Education Sciences*, *13*, 245. https://doi.org/10.3390/educsci13030245

D'Amore, B., & Fandiño-Pinilla, M. (2004). Cambios de convicciones en futuros profesores de matemática de la escuela secundaria superior. *Epsilon*, *58*(20), 25–43.

Donoso, P., Rico, N., & Castro, E. (2016). Creencias y concepciones de profesores chilenos sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje. *Profesorado. Revista de Curriculum y Formación Del Profesorado*, *20*(2), 76–97. https://doi.org/10.30827/profesorado.v20i2.10409

Escobar, M., & Broitman, C. (2016). La enseñanza (de las matemáticas) en aulas plurigrado como objeto de estudio en la formación docente. En D. Juárez Bolaños (Ed.), *Educación rural: experiencias y propuestas de mejora* (pp. 59–79). Colofón: Red de Temática de Investigación de Educación Rural; Universidad Autónoma de Sinaloa.

Faragher, R., Hill, J., & Clarke, B. (2016). Inclusive practices in mathematics education. In K. Makar, S. Dole, J. Visnovska, M. Goos, A. Benison, & K. Fry (Eds.), *Research in Mathematics Education in Australasia 2012-2015* (pp. 119–141). Springer. https://doi.org/10.1007/978-981-10-1419-2_7

Filippi-Peredo, C., & Aravena-Díaz, M. (2021). Didáctica e inclusión en las aulas de matemática. Análisis de un caso en Chile. *Revista Electrónica Educare*, *25*(1), 1–21. https://doi.org/10.15359/ree.25-1.23

Furinghetti, F., & Pehkonen, E. (2002). Rethinking characterizations of beliefs. In G. Leder, E. Pehkonen, & G. Torner (Eds.), *Beliefs: A hidden variable in mathematics Education?* (pp. 39–57). Kluwer Academic Publishers. https://doi.org/10.1007/0-306-47958-3_3

Gates, P., & Vistro-Yu, C. P. (2003). Is mathematics for all? In A. Bishop, M. A. Clements, C. Kentel, J. Kilpatrick, & F. Leung (Eds.), *Second International Handbook of Mathematics Education* (pp. 31–73). Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-010-0273-8_3

Hart, L. (2002). Preservice teachers' beliefs and practice after participating in an integrated content/methods course. *School Science and Mathematics*, 102 (1), 4–14. https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.2002.tb18191.x

Jaworski, B., & Potari, D. (1998). Characterising mathematics teaching using the teaching triad. In A. Oliver & K. Newstead (Eds.), *Proccedings of the 22nd Conference of the International Group for the Psychology of mathematics education* (Vol. 3, pp 88–103). University Stellenbosh.

Jordan, A., Schwartz, E., & McGhie-Richmond, D. (2009). Preparing teachers for inclusive classrooms. *Teaching and Teacher Education*, *25*(4), 535–542. https://doi.org/10.1016/j.tate.2009.02.010

Kong, Q.-P., Wong, N.-Y., & Lam, C.-C. (2003). Student engagement in mathematics: Development of instrument and validation of construct. *Mathematics Education Research Journal*, *15*(1), 4–21. https://doi.org/10.1007/BF03217366

López, J., & Aké, L. (2015). Formación matemática del docente de Educación Especial. En P. Rick & Á. Ruiz (Eds.), *Educación matemática en las Américas 2015, Volumen 14: Necesidades Especiales* (Vol. 14, pp. 94–101). (CIAEM) Comité Interamericano de Educación Matemática, (PUCMM) Pontificia Universidad Católica Madre y Maestra.

López, J., Hernández, J., Aké-Tec, L., & Ordaz, M. (2020). Formación inicial docente en México: Hacia una caracterización del conocimiento matemático inclusivo. *Eco Matemático*, *11*(2), 87–99. https://doi.org/10.22463/17948231.3013

Louie, N. L. (2015). *Learning to redefine "good at math": Tensions and possibilities in equity-oriented mathematics teachers' everyday practice*. [Doctoral thesis, University of California]. https://escholarship.org/uc/item/9xr5t741

Louie, N. L. (2017). The culture of exclusion in mathematics education and its persistence in equity-oriented teaching. *Journal for Research in Mathematics Education*, *48*(5), 488–519. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.48.5.0488

Martínez Silva, M. (2003). *Concepciones sobre la enseñanza de la resta: un estudio en el ámbito de la formación permanente del profesorado* [Tesis doctoral, Universidad Autónoma de Barcelona].

Nieminen, J. H., Bagger, A., & Allan, J. (2023). Discourses of risk and hope in research on mathematical learning difficulties. *Educational Studies in Mathematics*, *112*(2), 337–357. https://doi.org/10.1007/s10649-022-10204-x

Pehkonen, E. (1994). On teachers' beliefs and changing mathematics teaching. *Journal Für Mathematik-Didaktik*, *15*(3–4), 177–209.

Pehkonen, E. (2006). What do we know about teacher change in mathematics? In *Kunskapens och lärandets villkor. Festskrift tillägnad professor Ole Björkqvist* (Vol. 1, pp. 77–87).

Peltenburg, M. (2012). *Mathematical potential of special education students* [Doctoral thesis, University of Utrecht]. https://research-portal.uu.nl/en/publications/mathematical-potential-of-special-education-students

Potari, D., & Jaworski, B. (2002). Tackling complexity un mathematics teaching development: Using the teaching triad as a tool for reflection and analysis. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *5*, 351–380. https://doi.org/10.1023/A:1021214604230

Roos, H. (2019). Inclusion in mathematics education: An ideology, a way of teaching, or both? *Educational Studies in Mathematics*, *100*(1), 25–41. https://doi.org/10.1007/s10649-018-9854-z

Roos, H. (2023). Students' voices of inclusion in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, *113*(2), 229–249. https://doi.org/10.1007/s10649-023-10213-4

Scherer, P., Beswick, K., DeBlois, L., Healy, L., & Moser, E. (2016). Assistance of students with mathematical learning difficulties: How can research support practice? *Mathematics Education*, *48*(5), 633–649.

Scherer, P., & Krauthausen, G. (2010). Natural differentiation in mathematics - the NaDiMa project. *Panama Post, 29*(3), 14–26.

Stipek, D., Givvin, K., Salmon, J., & MacGyvers, V. (2001). Teachers' beliefs and practices related to mathematics instruction. *Teaching and Teacher Education, 17*(2), 213–226. https://doi.org/10.1016/S0742-051X(00)00052-4

Sullivan, P. (2015). Maximising opportunities in mathematics for all students: Addressing within-school and within-class differences. In A. Bishop, T. Hasel, & T. Barkatsas (Eds.), *Diversity in Mathematics Education Towards Inclusive Practices* (pp. 239–253). https://doi.org/10.1007/978-3-319-05978-5_14

Sullivan, P., Clarke, D., Clarke, B., & O'Shea, H. (2010). Exploring the relationship between task, teacher actions, and student learning. *PNA. Revista de Investigación en Didáctica de La Matemática*, *4*(4), 133–142. https://doi.org/10.30827/pna.v4i4.6163

Tzur, R. (2008). A researcher perplexity: Why do mathematical tasks undergo metamorphosis in teacher hands? In O. Figueras, J. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano, & A. Sepúlveda (Eds.), *International Group for the Psychology of Mathematics Education, Proceedings of the Joint Meeting of PME 32 and PME-NA XXX* (Vol. 1, pp. 139–147). PME.

Valero, P. (2013). Mathematics for all and the promise of a bright future. In B. Ubuz, Ç. Haser, & M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the Eight Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1804–1813). *European Society for Research in Mathematics Education.*

Vicente, L. (1995). *Palabras y creencias: Ensayo crítico acerca de la comunicación humana y de las creencias.* Editum.

Vincenzi, A. (2009). Concepciones de enseñanza y su relación con las prácticas docentes: Un estudio con profesores universitarios. *Educación y educadores*, *12*(2), 87–101. https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=83412219006

Vodičková, B., Mitašíková, P., & Slavíčková, M. (2023). Supportive factors in inclusive mathematics education: Mathematics teachers' perspective. *Education Sciences*, *13*(5), 465. https://doi.org/10.3390/educsci13050465

Volmink, J. (1994). Mathematics by all. In S. Lerman (Ed.), *Cultural Perspectives on the Mathematics Classroom. Mathematics Education Library* (Vol. 14, pp. 51–67). Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-017-1199-9_4

Woodcock, S., & Vialle, W. (2010). Attributional beliefs of students with learning disabilities. *The International Journal of Learning: Annual Review*, *17*(7), 177–192. https://doi.org/10.18848/1447-9494/CGP/v17i07/47160

Manipolazione Algebrica e Disabilità Visive: Tre Studi di Caso a Confronto

Algebraic Manipulation and Visual Impairments: Comparing Three Case Studies

Manipulación Algebraica y Discapacidades Visuales: Comparando Tres Estudios de Caso

Silvia Regola,[1] Andrea Maffia[2] e Carola Manolino[3]

[1]*Dipartimento di Scienze umane e sociali, Università di Bergamo, Italia*

[2]*Dipartimento di Matematica, Università di Bologna, Italia*

[3]*Dipartimento di Scienze umane e sociali, Università della Valle d'Aosta, Italia*

Sunto. *L'insegnamento della matematica in presenza di disabilità visive può presentare alcune difficoltà, anche nell'ambito della manipolazione algebrica. Le tecnologie assistive si sono sviluppate per facilitare la lettura dei contenuti matematici, ma ci sono scarse informazioni su come queste influiscano sulla costruzione di significati e sulle abilità di manipolazione simbolica. Questo studio cerca di colmare tale lacuna attraverso le interviste a tre soggetti con disabilità visive, impegnati nella risoluzione di problemi algebrici. L'analisi delle loro strategie risolutive, nel quadro teorico del senso della struttura, evidenzia come l'accesso alla matematica tramite mezzi diversi possa influenzare la comprensione intuitiva della materia.*

Parole chiave: algebra, disabilità visive, senso della struttura, tecnologie assistive, manipolazione simbolica.

Abstract. *Mathematics education in the presence of visual impairments can pose unique challenges, particularly in the area of algebraic manipulation. Assistive technologies have been developed to facilitate the reading of mathematical content, but there is a dearth of insights into how these affect meaning-making and symbolic manipulation skills. This study seeks to bridge this gap through interviews with three individuals with visual impairments engaged in algebraic problem-solving. Framed within the theoretical construct of Structure Sense, the analysis of their solving strategies shows how access to mathematics through different means may influence the intuitive understanding of the subject.*

Parole chiave: algebra, visual impairments, structure sense, assistive technologies, symbolic manipulation.

Resumen. *La enseñanza de las matemáticas en presencia de discapacidades visuales puede presentar algunas dificultades, sobre todo en el ámbito de la manipulación* *algebraica. Las tecnologías asistivas se han desarrollado para facilitar la lectura de los contenidos matemáticos, pero hay escasa información sobre cómo afectan la construcción de significados y las capacidades de manipulación simbólica. Este estudio intenta llenar esta lacuna a través de entrevistas a tres personas con discapacidades visuales, que participan en la resolución de problemas algebraicos. El análisis de sus estrategias de resolución, en el marco teórico del sentido de la estructura, destaca cómo el acceso a las matemáticas a través de medios diferentes puede influir en la comprensión intuitiva de la materia.*

Palabras clave: álgebra, discapacidades visuales, sentido de la estructura, tecnologías asistivas, manipulación simbólica.

1. Introduzione

La letteratura sull'apprendimento della matematica da parte degli studenti non vedenti è molto limitata. Healy e Fernandes (2011) e Del Zozzo e Santi (2023) hanno osservato che i soggetti ciechi possono coinvolgere i gesti nella loro appropriazione di significati matematici; descrivendo i gesti usati da un soggetto cieco come rievocazioni di attività precedentemente vissute, mostrano il legame che questi hanno con la costruzione di conoscenze matematiche e la loro concettualizzazione. Le loro argomentazioni sono convincenti nel caso di figure geometriche e solidi: il gesto può corrispondere a passate esperienze di toccare, muovere un dito lungo artefatti fisici. Allo stesso modo, la descrizione del grafico di una funzione potrebbe essere basata sull'esperienza corporea del movimento (Núñez et al., 1999; Ahmetovic et al., 2019). Tuttavia, nel caso di altre rappresentazioni matematiche, come i simboli algebrici, la loro forma risulta molto più distaccata dall'esperienza sensoriale e motoria. Pertanto, appare lecito interrogarsi su che ruolo può avere la gestualità in questo contesto, come gli studenti con disabilità visive possano accedere a questo tipo di rappresentazioni e come questi aspetti influenzino le loro attività matematiche. Le tecnologie assistive e l'alfabeto Braille possono essere mezzi idonei per accedere alle rappresentazioni algebriche (Alajarmeh et al., 2011; Armano et al., 2018; Bouck et al., 2016) e, anche per ottimizzarne lo sviluppo e la standardizzazione, è importante sapere come avviene l'interazione con essi.

Per quanto in nostra conoscenza, la letteratura nazionale o internazionale nel campo dell'educazione matematica sulla manipolazione dei simboli algebrici da parte di studenti ciechi è scarsissima. Questo studio vuole contribuire ai primi passi necessari per colmare questa lacuna nella ricerca, offrendo una descrizione del processo di manipolazione dei simboli algebrici, da parte di individui ciechi o ipovedenti esperti,[1] mentre risolvono un compito algebrico.

[1] Con individui esperti intendiamo persone adulte con una formazione scientifica tale da permettere loro di affrontare quesiti matematici con sicurezza e padronanza.

2. Algebra e Disabilità Visive

Tradizionalmente gli insegnanti di matematica fanno largo uso della lavagna, di disegni e di diagrammi (Mellone et al., 2021; Piroi et al., 2023); le metafore visive sono molto comuni nelle spiegazioni dei docenti che desiderano rendere più chiari i concetti matematici più astratti (per esempio, è fatto ampio uso di locuzioni avverbiali di luogo, o si parla di "vedere" una struttura algebrica o di "cieca manipolazione" – Pimm, 2002, p. 89). Questo, purtroppo, porta molti degli insegnanti che si trovano a lavorare con studenti con residuo visivo basso o nullo, a esonerare lo studente con disabilità visiva dal conseguire alcuni obiettivi, che non sanno come adattare alle sue esigenze sensoriali e cognitive.

I materiali e gli ausili didattici adeguati possono variare molto in base alla situazione dell'alunno:

- per lo studente cieco, trascrizione in Braille dei manuali, immagini in rilievo, diagrammi tattili, modelli del piano o dello spazio;
- per lo studente ipovedente, video-ingranditori, illuminazione adeguata, con attenzione ai colori e ai contrasti, a seconda delle specifiche caratteristiche del disturbo visivo.

Bisogna sfruttare il più possibile il sistema aptico e quello uditivo, favorire ed educare l'esplorazione sonora, tattile, la manipolazione e gli stimoli psicomotori (Marichal et al., 2022). Del Campo (2000) suggerisce che, quando possibile, il materiale venga realizzato dall'alunno stesso "perché l'artefice conosce sempre la sua opera meglio del più attento osservatore" (p. 123). Le azioni e i movimenti attuati nella costruzione del materiale o della rappresentazione simbolica attivano processi cognitivi utili al riconoscimento delle relazioni e delle proprietà tra gli oggetti matematici osservati, che difficilmente possono essere compensati da una ricezione sensoriale passiva e, ancor meno, dalla semplice descrizione verbale.

Le spiegazioni orali per studenti con disabilità visive devono essere ricche e descrittive, ma devono anche prevedere particolari accorgimenti per compensare il fatto che lo studente con disabilità visiva non ha accesso a larga parte del linguaggio non verbale (Tornavacca, 2002). La dettatura di formule o espressioni e le spiegazioni, che di solito vengono pronunciate in contemporanea alla scrittura alla lavagna, devono seguire alcune accortezze. Frasi come "a più b al quadrato" o "radice di due per x", in italiano, sono ambigue per chiunque non abbia una buona visuale della lavagna; perciò, bisognerebbe sempre specificare dove cominciano e dove finiscono parentesi, numeratori, denominatori, esponenti e argomenti di radici, di funzioni elementari, etc. Questo tipo di accortezza non può che facilitare anche gli altri studenti (Papadopoulos & Thoma, 2022).

D'altra parte, il linguaggio naturale ha comunque diversi difetti: la necessità descrittiva rende le frasi lunghe e complesse, la comunicazione orale ha una struttura lineare e sequenziale, a differenza di alcune espressioni algebriche (per esempio le frazioni). Facendo affidamento al solo stimolo orale, risulta particolarmente faticoso elaborare le informazioni e riconoscere le relazioni che, in presenza di vista, possono essere più facilmente comprese. Il linguaggio scritto appare molte volte utile se non addirittura necessario.

Nel caso di studenti ipovedenti, il linguaggio scritto può divenire accessibile grazie a video-ingranditori e altri strumenti utili a regolare il contrasto e il colore. Nel caso di studenti ciechi, è possibile fare uso della sintesi vocale o del Braille.

Oggi, nel mondo, vengono usati due sistemi per il codice Braille: il codice Braille a 6 punti e il codice Braille a 8 punti. Di solito, se non è specificato diversamente, con "codice Braille" si intende quello a 6 punti, ovvero quello che viene insegnato alla scuola primaria, che viene stampato sui libri prodotti per studenti ciechi, sulle confezioni dei farmaci, ecc. Si tratta di un alfabeto che dispone di solo 64 caratteri distinti. Tra questi ci sono dei simboli che hanno la funzione di prefissi, come "segna-maiuscole" e "segna-numero", che cambiano il significato dei caratteri successivi. Ai fini di adattare il Braille a un ambiente informatico, che necessita di un numero maggiore di caratteri, si utilizza il Braille a 8 punti. Esso ha una codificazione internazionale e offre la possibilità di rappresentare fino 256 caratteri. La barra/tastiera Braille è un dispositivo hardware che permette di leggere, in modo tattile, quanto visibile a schermo.

L'acquisizione di questi simboli e l'attribuzione di senso sono parte integrante dell'educazione matematica, quindi, anche il simbolo matematico in Braille deve essere introdotto all'alunno cieco simultaneamente all'introduzione del corrispondente simbolo al resto degli alunni (del Campo, 2000).

Per semplificare il linguaggio algebrico Braille e migliorare la possibilità di interagire e confrontarsi con chi non lo maneggia, sono stati ideati dei software specifici per la scrittura matematica, ad esempio LAMBDA (acronimo di Linear Access to Mathematic for Braille Device and Audiosynthesis) e, più recentemente, EDICO (Editor Científico ONCE). Entrambi i software permettono alle persone cieche o gravemente ipovedenti di scrivere e manipolare espressioni algebriche in un ambiente inclusivo; LAMBDA, che nasce all'interno di un progetto europeo (Schweikhardt et al., 2006), è un servizio a pagamento pensato per l'uso con la barra Braille ed è attualmente usato in ambiente scolastico; EDICO, rilasciato nel 2018 dall'Organizzazione Nazionale dei Ciechi di Spagna (ONCE), in collaborazione con l'Universidad Complutense de Madrid, è un software gratuito che facilita l'accesso anche a contenuti di altre aree scientifiche, come la fisica o la chimica, e favorisce ulteriormente l'interazione diretta con le persone vedenti (Martínez et al., 2022).

A livello universitario gli studenti devono poter essere più autonomi e indipendenti, spesso questo è un ulteriore ostacolo per gli studenti con disabilità visive. In questo contesto, la necessità di fare matematica attraverso il computer diventa primaria per tutti: è necessario rappresentare tutte le espressioni, anche le più complesse, con un codice lineare. Gli studenti con disabilità visive possono allora sfruttare linguaggi di formattazione, originariamente dedicati alla pubblicazione elettronica di documenti di testo scientifici (TEX, LATEX, MathML); oppure sistemi CAS (computer algebra system). Essi prevedono l'inserimento di comandi lineari, completamente testuali e quindi accessibili tramite barra Braille o sintesi vocale (Derive, MuPAD, MAPLE, MathCad o Mathematica) (Armano et al., 2022; Kohanová, 2006).

Tutti gli strumenti fin qui citati permettono allo studente con disabilità visive di accedere al simbolismo algebrico e di manipolarlo, almeno parzialmente. Tuttavia, rimangono alcune difficoltà che possono essere ascritte alla sfera cognitiva.

In generale, la visione d'insieme rimane difficilmente accessibile: il Braille e la sintesi vocale permettono solo un accesso sequenziale e lineare ai testi e anche l'uso del video ingranditore permette di vederne solo una porzione alla volta. Le espressioni particolarmente complicate, d'altra parte, richiedono un'analisi strutturale (nel senso che chiariremo meglio nella prossima sezione) e il confronto fra sottostrutture algebriche, che possono essere disposte ad una certa distanza tra loro. Per uno studente con disabilità visiva, questo richiede una ricostruzione mentale di tutta l'espressione nel suo insieme, con un consistente sforzo mnemonico (tanto maggiore quanto più l'espressione è lunga e complessa) (Withagen et al., 2013).

La scrittura matematica ha una struttura fortemente bidimensionale: l'uso dello spazio di stampa è ampiamente sfruttato per trasmettere in modo sintetico le informazioni al lettore vedente (apici, pedici, frazioni, radici quadrate, etc.).

Nel testo in Braille e nella lettura da parte della sintesi vocale, invece, la struttura è lineare e le informazioni implicite nella disposizione spaziale devono essere rese esplicite, rendendo difficile l'accesso e la comprensione della matematica da parte degli studenti con disabilità visive. Il carattere lineare di questi strumenti influisce anche sulla possibilità di svolgere operazioni che vengono facilitate dalla rappresentazione bidimensionale (ad esempio la semplificazione incrociata nel prodotto fra frazioni) o interi algoritmi che sono strettamente legati a un certo schema "spaziale" (operazioni in colonna, divisione con Ruffini, etc.).

3. Senso della Struttura

Il coinvolgimento delle tecnologie digitali nel processo di insegnamento-apprendimento della matematica ha fornito molte nuove opportunità agli studenti con disabilità visive che possono fare affidamento su screen reader (e altre tecnologie assistive) e barre Braille per accedere al testo scritto, comprese le formule algebriche (Alajarmeh et al., 2011; Armano et al., 2018). Tuttavia, l'utilizzo di simboli algebrici per la risoluzione di problemi matematici non richiede solo la mera lettura dei simboli, ma anche la capacità di agire su di essi, di manipolarli. Mentre non mancano gli studi che si sono concentrati su come i libri di testo digitali possano supportare l'attività algebrica degli studenti (e.g., Bouck et al., 2016), scarseggia la ricerca sui sistemi per consentire agli studenti di agire in modo produttivo sui simboli (Alajarmeh et al., 2011; Maffia et al., 2023).

Quando ci riferiamo alla manipolazione dei simboli algebrici, non ci riferiamo all'applicazione meccanica delle regole di trasformazione delle espressioni algebriche (che chiameremo da qui in poi "approccio procedurale"). Riteniamo che una manipolazione competente comporti il ricorso a "strutture equivalenti di un'espressione in modo flessibile e creativo" (Linchevsky & Livneh, 1999, p. 191) ovvero di quello che in letteratura viene definito come *senso della struttura* (o approccio strutturale) (*ibidem*). Secondo Hoch e Dreyfus (2004), nel contesto dell'algebra scolastica, il senso della struttura può essere descritto come composto da sei abilità. Le elenchiamo di seguito esemplificandole facendo riferimento al processo risolutivo di una delle equazioni utilizzate nello studio: $\frac{1}{4}-\frac{x}{x-1}-x=7+\frac{1}{4}-\frac{x}{x-1}$.

- **SS1.** Vedere un'espressione o una frase algebrica come un'entità. Nell'esempio proposto, si tratta di riconoscere che la scrittura proposta è un'equazione in cui due espressioni algebriche sono messe a confronto mediante una relazione di congruenza.
- **SS2.** Riconoscere un'espressione o una frase algebrica come una struttura precedentemente incontrata. Questa componente è mobilitata, per esempio, da chi nota che la frazione algebrica $\frac{x}{x-1}$ compare a entrambi i membri dell'equazione.
- **SS3.** Dividere un'entità in sottostrutture. Si riconosce questo comportamento in chi nota che ciascuno dei membri dell'uguaglianza è composto dalla somma di un numero razionale e di una frazione algebrica a cui è aggiunto un altro termine.
- **SS4.** Riconoscere le connessioni reciproche tra le strutture. Il solutore potrebbe riconoscere che, "trasportando" una delle frazioni algebriche all'altro membro dell'uguaglianza si otterrebbero due termini opposti allo stesso membro.
- **SS5.** Riconoscere quali manipolazioni è possibile eseguire. Nell'esempio proposto, si può riconoscere che è possibile "trasportare" tutti i membri in cui compare l'incognita a uno dei membri dell'equazione, in alternativa si possono prima cancellare termini uguali che compaiono in entrambi i membri.
- **SS6.** Riconoscere quali manipolazioni è utile eseguire. A partire dal riconoscimento fatto grazie alla componente precedente, si può notare che è più efficiente eliminare le frazioni algebriche piuttosto che sommarle tra loro.

Nell'analizzare tre casi di studio, ci domanderemo se e come i soggetti non vedenti e ipovedenti possono fare affidamento sul proprio senso della struttura mentre risolvono un compito algebrico, la cui accessibilità è fornita attraverso strumenti digitali quali la sintesi vocale, la barra Braille e i video-ingranditori.

4. Metodi

Poiché si vuole indagare un aspetto su cui la letteratura scientifica nota è scarsa, per questa ricerca si è adottato il metodo del caso di studio esplorativo, che permette di dare una descrizione ricca e approfondita del fenomeno in oggetto (Cohen et al., 2007).

Per farlo sono state condotte tre interviste con adulti non vedenti e ipovedenti, considerati "esperti in matematica", in quanto hanno conseguito o stanno conseguendo una Laurea Magistrale in Matematica o in Fisica. Le tre interviste sono state realizzate indipendentemente e in momenti separati.

Antonio (uno pseudonimo) è cieco, ma fino a quattro anni prima dell'intervista era ipovedente con una grave patologia degenerativa; accede ai contenuti matematici in Latex, usando la sintesi vocale. Monica (altro nome di fantasia) è cieca dalla nascita; accede ai contenuti matematici in Latex, usando la barra Braille a otto punti. Silvano (ancora uno pseudonimo) ha disabilità progressive di tipo visivo e motorio, è ipovedente e ha limitazioni nell'uso delle mani; accede al testo stampato usando un video ingranditore da tavolo.

Tutti e tre i soggetti si sono prestati volontariamente per partecipare alle interviste; erano consapevoli di essere registrati per finalità di ricerca, ma non conoscevano i quadri teorici utilizzati per l'analisi.

L'intervista si concentra sulle esperienze soggettive degli intervistati, che i ricercatori stimolano a descrivere approfonditamente, spiegando ogni ragionamento fatto, motivando le scelte e le strategie risolutive, esplicitando gli strumenti utilizzati e i significati attribuiti ai simboli e alle strutture delle espressioni algebriche.

Per ottenere una descrizione "densa" sono state raccolte diverse fonti di dati, tra cui:

> atti di parola; comunicazione non verbale; descrizioni in un vocabolario a bassa inferenza; [...] registrazione dell'ora e dei tempi degli eventi; commenti dell'osservatore [...]; dati contestuali dettagliati. (Cohen et al., 2007, p. 254)

Si è effettuata sia la registrazione audio e video delle interviste (attraverso una webcam), sia la cattura dello schermo del computer dell'intervistato, quando utilizzato. I video sono stati completamente trascritti il più fedelmente possibile, aggiungendo la descrizione delle azioni e della comunicazione non verbale.[2]

L'intervista utilizza come stimolo diversi quesiti di matematica, qui ci

[2] Il testo completo delle trascrizioni è riportato nella tesi di laurea magistrale di Regola (2023).

concentreremo solo su quelle di tipo algebrico, che riportiamo nel seguito.[3] Nell'intervista vengono presentati due gruppi di tre equazioni ciascuno (A, B, C) e (X, Y, Z), con diverso numero di parentesi (0, 1 o 2). Ad ogni intervistato è stato chiesto di scegliere e risolvere una coppia di equazioni, formata da un'equazione presa dal primo gruppo (dove l'incognita compare solo nel primo membro) e una dal secondo gruppo (dove l'incognita compare in entrambi i membri), ma escludendo le coppie di equazioni con lo stesso numero di parentesi.

A: $1-\frac{1}{n+2}-\left(1-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{110}$

B: $\left(1-\frac{1}{n+1}\right)-\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{132}$

C: $1-\frac{1}{n+3}-1+\frac{1}{n+3}=\frac{1}{72}$

X: $\frac{1}{4}-\frac{x}{x-1}-x=5+\left(\frac{1}{4}-\frac{x}{x-1}\right)$

Y: $\left(\frac{1}{4}-\frac{x}{x-1}\right)-x=6+\left(\frac{1}{4}-\frac{x}{x-1}\right)$

Z: $\frac{1}{4}-\frac{x}{x-1}-x=7+\frac{1}{4}-\frac{x}{x-1}$

Queste equazioni sono tratte dall'articolo di Hoch e Dreyfus (2004) precedentemente citato. Nello studio originale, vengono considerate come prova di una mancanza di senso della struttura, ad esempio, le azioni di aprire le parentesi e/o di trovare un comune denominatore. Nei risultati, gli autori affermano che la presenza delle parentesi aiuta gli studenti a concentrarsi sulle entità simili, favorendo un approccio strutturale.

In questo studio, queste sei equazioni sono state usate per stimolare il senso della struttura negli intervistati e indagare come esso può essere influenzato dalle tecnologie assistive da loro utilizzate, anche osservando se ci sono delle differenze rispetto ai risultati noti sulla popolazione generale.

A tal fine, è stata fatta un'analisi dettagliata dei procedimenti risolutivi esposti dagli intervistati, identificando, per ciascun passaggio algebrico, l'utilizzo di una o più delle sei abilità caratterizzanti il senso della struttura, come definite da Hoch e Dreyfus (2004). Ad esempio, se la persona intervistata dice che una frazione algebrica è uguale ad una letta prima, si è rilevata la capacità di riconoscere un'espressione o una frase algebrica come una struttura precedentemente incontrata (SS2); se valuta la possibilità di calcolare il minimo comun denominatore, si è rilevata la capacità di riconoscere quali manipolazioni

[3] Il testo completo delle consegne può essere trovato in Regola (2023). L'analisi delle risposte ad altre consegne rispetto a quelle qui presentate è stata pubblicata in Miragliotta et al. (2023) e in Maffia et al. (2023).

è possibile eseguire (SS5); etc. Il risultato di questa analisi puntuale è riassunto in Tabella 1 presente in appendice.[4]

Nel corso delle interviste si è chiesto di spiegare alcune scelte, si sono discusse le strategie risolutive e si sono fatte domande mirate sul ruolo delle parentesi, per arricchire l'osservazione e rendere l'analisi più aderente all'esperienza dei risolutori coinvolti nello studio.

Per ciascuna intervista, il processo è stato fatto da almeno uno degli autori e poi confermato dagli altri.

5. Le Interviste

Nelle interviste raccolte sono stati analizzati in modo fine i processi che vengono messi in atto, dai soggetti con disabilità visiva, per risolvere espressioni algebriche.

Un aspetto che si può facilmente osservare da queste interviste è l'influenza che hanno, nelle strategie risolutive, il mezzo di accesso al contenuto matematico e gli strumenti utilizzati per la manipolazione.

Antonio utilizza lo screen reader NWDA, che legge tramite sintesi vocale il codice Latex. Per svolgere i passaggi algebrici, il codice viene manipolato tramite il software "Blocco note" (per una descrizione più dettagliata si veda Maffia et al., 2023). Questa tecnologia influenza significativamente lo svolgimento dell'intervista, in particolare perché fornisce una lettura molto diversa da quella utilizzata in matematica e che, quindi, richiede una sostanziale rielaborazione per poter essere compresa. Lo screen reader permette due modalità di lettura: un'intera riga di seguito oppure un carattere per volta, muovendosi con le frecce della tastiera. Quando questa seconda modalità di lettura avviene sul "blocco note" è possibile seguire i movimenti del cursore tramite la registrazione dello schermo.

La lettura del contenuto matematico è molto lenta e questa attività occupa buona parte del tempo necessario per rispondere ai quesiti proposti. Ad esempio, la prima frazione dell'equazione A, se letta con la modalità "continua", restituisce la seguente frase: «uno frac uno enne più due». Se invece la stessa frazione viene letta carattere per carattere, viene pronunciata come segue: «uno trattino controbarra effe erre a ci spazio aperta-graffa uno chiusa-graffa aperta-graffa enne più due chiusa-graffa»; affinché la sintesi vocale legga interamente la prima equazione in questa modalità sono necessari almeno 25 secondi.

Osservando gli spostamenti di Antonio nella stringa di testo, si notano delle strategie per ottimizzare la lettura, che avviene in modo tendenzialmente lineare, ma con delle soste (in corrispondenza dei segni "+" e "–" e delle frazioni) e delle inversioni di direzione (riflettendo la necessità di rileggere

[4] L'analisi completa di tutti i passaggi delle interviste è riportata nella tesi di laurea magistrale di Regola (2023).

alcune parti). Le frazioni più semplici vengono riportate a voce in una forma compatta e convenzionale ("uno su centodieci"); tuttavia, le frazioni più complesse vengono comunicate solo in modo implicito ("questo"); questi differenti comportamenti indicano che la necessità di riorganizzare e ri-verbalizzare quello che viene percepito dalla sintesi vocale può comportare una difficoltà nel gestire mentalmente le varie componenti.

Monica utilizza un display Braille per leggere il codice Latex (per una descrizione più dettagliata si veda Miragliotta et al., 2023). Osservando il modo in cui muove le sue dita, si nota che la lettura coinvolge entrambe le mani, in modo coordinato e strategico: i movimenti rapidi e bidirezionali si soffermano su specifici elementi, che aiutano il riconoscimento delle strutture e la visione globale. Ad esempio, nel leggere l'equazione B, prima le mani scorrono affiancate sul display Braille toccando il contenuto della prima parentesi tonda, poi la mano destra resta ferma sulla parentesi chiusa, mentre la sinistra torna indietro e ripercorre carattere per carattere dentro la prima parentesi, mentre Monica legge ad alta voce il contenuto; quando le mani si ricongiungono, subito la destra scorre in avanti fino alla fine della seconda parentesi, poi la sinistra scorre avanti e indietro sul suo contenuto. Questi gesti suggeriscono che la lettura avvenga in modo funzionale al riconoscimento delle strutture algebriche. È Monica stessa ad affermare, durante l'intervista, di affidarsi a una percezione aptica tramite Braille per riconoscere le strutture.

Silvano legge la matematica con strumenti che ingrandiscono il testo, ma questo restringe il suo campo visivo, limitando la simultaneità tipica della vista. La percezione visiva, nonostante l'ingrandimento, spesso manca di precisione, rendendo incerta la lettura dei caratteri; in matematica questo diventa un problema significativo (come confondere un segno "+" con un "–"), costringendolo a rileggere più volte i vari passaggi. La disabilità di carattere motorio di Silvano limita la sua capacità di muovere le mani, rendendo impossibile, durante l'intervista, qualsiasi forma di produzione scritta. Nel periodo della sua formazione scolastica le sue disabilità erano meno gravi, ma col tempo Silvano si è adattato a risolvere i problemi affidandosi esclusivamente alla manipolazione mentale. Egli afferma che la sua notevole capacità mnemonica è fondamentale nelle sue attività di studio e lavoro quotidiane.

Di seguito riportiamo una sintesi dei procedimenti risolutivi adottati dalle tre persone intervistate, la cui analisi puntuale ha portato alla compilazione della Tabella 1.

5.1. I Processi Risolutivi di Antonio

Antonio sceglie di risolvere la coppia di equazioni (C, X).

Inizia a risolvere l'equazione C, dicendo «vediamo quello che si può ridurre»; quindi, in pochi minuti, riconosce i termini opposti, li cancella e scrive "0=\frac{1}{72}", definendolo il "risultato". In seguito, esprime dei dubbi sulla correttezza del procedimento eseguito, si chiede se non fosse meglio calcolare il minimo comune denominatore tra le frazioni.

Mentre rilegge l'equazione X, la sua attenzione è fortemente attratta dalla presenza delle parentesi tonde; dunque, dice: «inizierei dal capire… lavorando sulla parentesi tonda». Inizia ad effettuare numerose manipolazioni all'interno della parentesi tonda (minimo comun denominatore, riscrittura dei numeratori, somma algebrica, semplificazione del numeratore, etc.), finché non riscrive l'intera sotto-espressione come un'unica frazione. Ciascun passaggio viene scritto con l'applicativo "blocco-note", sul quale viene lasciata traccia di tutti i passaggi precedenti.[5] A questo punto, tornando a leggere il primo membro dell'equazione, riconosce la stessa espressione che c'era tra parentesi: «Quindi il risultato è lo stesso di quello che c'era di là, perché è uguale». Dopo aver copiato la frazione ricavata precedentemente al posto della sotto-espressione iniziale, cancella le frazioni uguali nei due termini dell'equazione. Infine, inverte i segni e trova la soluzione.

5.2. I Processi Risolutivi di Monica

Monica sceglie subito di risolvere l'equazione C, mentre motiva la sua scelta, risolve a mente l'equazione, riconoscendo molto rapidamente tutti i termini da semplificare. Nel frattempo, rilegge le altre due equazioni e commenta: «In realtà, ora che ci faccio caso, anche la prima era così, però erano le parentesi che non me lo avevano fatto capire subito». Su richiesta dell'intervistatrice mostra i passaggi per iscritto, tramite un software di compilazione per Latex, quando scrive "0=\frac{1}{72}" dice: «Questa qua è impossibile, cioè non… è falsa proprio».

Mentre legge l'equazione Y (dopo aver letto l'equazione X) riconosce in pochi istanti i termini uguali e trova rapidamente la soluzione. Subito dopo confronta le strutture delle diverse equazioni e ne commenta le somiglianze.

5.3. I Processi Risolutivi di Silvano

Silvano legge lentamente le equazioni e sceglie di risolvere la C, riconosce rapidamente i singoli termini opposti tra loro, ponendosi il problema delle condizioni di esistenza: «[…] e anche meno uno su enne più tre e più uno su enne più tre, sono opposti... per tutti gli enne, diciamo, diversi da meno tre». Conclude che l'equazione è impossibile. Sceglie di risolvere l'equazione Y, anche in questo caso si pone il problema delle condizioni di esistenza, riconosce rapidamente le sotto-espressioni simili, le semplifica mentalmente e trova la soluzione: «a sinistra abbiamo sei più quel… quella stessa quantità […] quindi, x uguale meno sei».

---

5 Le manipolazioni algebriche e l'interazione con il dispositivo vengono analizzate più nel dettaglio in Maffia et al. (2023).

6. Risultati

Monica e Silvano, seppur usando strumenti differenti, riescono ad orientarsi e muoversi più efficacemente nella lettura del testo, rispetto a quanto non accada per Antonio. Questo sembra riflettersi anche nelle analogie delle strategie risolutive adottate nel ragionamento matematico. Di seguito, presentiamo una descrizione qualitativa delle risposte alle tre interviste. Il dettaglio delle componenti del senso della struttura rilevate nell'intervista è riportato nella Tabella 1 presente in Appendice.

6.1. Intervista ad Antonio

Antonio sceglie di risolvere le equazioni C (senza parentesi) e X (con una sola coppia di parentesi). Sostiene che questa scelta è guidata da considerazioni computazionali (magnitudine delle parti numeriche) più che strutturali. Nel risolvere la prima equazione vengono attuate principalmente strategie strutturali, mentre nella seconda equazione viene attivata una procedura di tipo prettamente manipolativo per svolgere i calcoli interni alla parentesi, conseguentemente, la risoluzione è più lunga e faticosa.

Nel complesso, si rileva la presenza di tutte le abilità legate al senso della struttura, queste, però, non vengono sempre applicate con sicurezza. Nell'analizzare il ruolo delle parentesi tonde, possiamo notare che queste catturano l'attenzione di Antonio, mentre analizza la struttura delle equazioni, sembra però che non lo aiutino a delimitare una sotto-struttura ma, piuttosto, richiamino la regola procedurale sull'ordine da seguire nelle operazioni. In particolare, è bene ricordare che Antonio non era cieco quando ha appreso questo contenuto didattico.

Rispondendo ad una domanda esplicita sul fatto che le parentesi possano aver influito nel riconoscimento della sotto-struttura che racchiudono, Antonio, inizialmente, risponde: «Se vogliamo sì, perché il fatto che fosse limitato, magari, può aver avuto un suo peso nel ricordarmelo», poi specifica: «Sia dalla lettura, sia dalle parentesi. Il fatto che era dentro le parentesi e ci ho lavorato, magari mi ha aiutato. Però sicuramente la lettura è stata principale». Si può ipotizzare che, durante la manipolazione, il necessario ascolto ripetuto della sintesi vocale e la sua continua rielaborazione mentale aiutino a fissare in memoria l'espressione, che poi può essere più facilmente riconosciuta. Solo in seguito a questo riconoscimento si attivano strategie più legate al senso della struttura.

6.2. Intervista a Monica e Silvano

Monica e Silvano scelgono entrambi indipendentemente di risolvere le equazioni C (senza parentesi) e Y (con due coppie di parentesi), questa scelta è guidata da considerazioni strutturali che permettono anche di anticipare rapidamente le soluzioni. Tutte le espressioni vengono svolte in modo efficace e con un ampio uso del senso della struttura: non vengono presi in considerazione il calcolo di denominatori comuni né le manipolazioni interne alle parentesi.

Monica nota le somiglianze strutturali e parla spontaneamente del ruolo che le parentesi hanno nel facilitare/ostacolare il riconoscimento delle sotto-strutture. In particolare, la situazione dove Monica trova più facile riconoscere le sotto-strutture è quella senza nessuna parentesi, la configurazione più sfavorevole, invece, è quella in cui una sotto-espressione è racchiusa tra le parentesi e l'altra no. In quest'ultima configurazione, infatti, sembra attivarsi anche un procedimento manipolativo; infatti, dice: «non è che immediatamente ho pensato 'ah, ok, si toglie la parentesi, si cambia il segno e siamo già a posto…', invece nella terza, quando l'ho letta, mi è proprio venuto in mente subito». Nel primo tipo di equazione (A), la presenza della parentesi rende meno immediata la possibilità di cancellazione e, nel secondo (X), le cancellazioni avvengono tra singoli termini, come se si "aprissero" le parentesi, senza sfruttare la possibilità di cancellare direttamente tutta l'espressione tra parentesi. Nel caso in cui, invece, entrambe le espressioni sono racchiuse tra parentesi, il riconoscimento delle strutture avviene comunque facilmente e non si attivano meccanismi maggiormente procedurali. Quando Monica riflette su questo, descrive l'effetto delle parentesi, come qualcosa che "isola" e, per questo, fa sì che sia meno facile riconoscere la possibilità di semplificare.

Anche Silvano fa delle considerazioni sulle somiglianze strutturali delle diverse equazioni; parla del modo in cui visualizza le varie parti delle espressioni, specificando che leggere ad alta voce il testo lo aiuta a "identificare i pezzi". In particolare, spiega che per lui è più facile farsi un'immagine delle parti tra parentesi, che descrive come "raggruppate". Tuttavia, nel considerare come la presenza o l'assenza delle parentesi influenzi la facilità di risoluzione, dice di preferire il caso in cui non c'è nessuna parentesi, coerentemente con la prima scelta fatta.

7. Discussione

A partire dai dati raccolti discutiamo come gli strumenti utilizzati per l'interpretazione e la risoluzione delle espressioni algebriche influenzino il processo risolutivo delle stesse.

Emergono alcune particolarità, che possono far emergere ipotesi interessanti. In particolare, notando che Antonio svolge il quesito in modo diverso da Silvano e Monica, risulta interessante cercare una spiegazione per questa differenza. Inoltre, rileviamo che le scelte e le valutazioni espresse dalle tre persone intervistate sembrano avere nei confronti delle parentesi un approccio in controtendenza rispetto a quanto descritto da Hoch e Dreyfus (2004).

Va considerato, innanzitutto, che l'ambiente di ricerca potrebbe aver influenzato i comportamenti dei partecipanti, che potrebbero aver adattato le proprie risposte in base alle aspettative immaginate sull'esito del colloquio; quindi, è necessario essere cauti nell'interpretare le cause di questi aspetti specifici.

Da un lato, si può sottolineare lo specifico percorso di formazione degli intervistati, dal quale potrebbero derivare diverse competenze o diversi approcci nella risoluzione di quesiti matematici, che potrebbero riflettersi in una maggiore o minore padronanza del senso della struttura. Tuttavia, queste ipotesi risultano deboli, se si considera il fatto che Antonio dimostra di avere tutte le abilità tipiche del senso della struttura.[6]

7.1. Il Ruolo della Sintesi Vocale

Antonio si differenzia dagli altri due intervistati: nei criteri per la scelta delle equazioni, nell'esigenza di scrivere molti passaggi, nell'approccio tendenzialmente più procedurale. Perciò, il suo caso merita di essere approfondito per spiegare tali differenze.

Il mezzo di accesso all'espressione può essere una variabile rilevante, questo suggerisce di analizzare più nel dettaglio se questo aspetto, per come emerge nelle tre interviste, è in relazione con l'uso del senso della struttura e in che modo può essere coinvolto.

Nel caso di Silvano, nonostante la lettura insicura e parcellizzata, viene acquisita una visione d'insieme in modo abbastanza facile e veloce, specialmente per le espressioni non troppo lunghe; la mobilità del video ingranditore, inoltre, facilita il confronto tra parti distanti dell'equazione.

Monica, esperta lettrice Braille, muove le mani seguendo degli schemi che manifestano strategie sofisticate per cogliere e confrontare le diverse strutture algebriche, specialmente se scritte in Latex, il linguaggio a lei più familiare. La sua lettura è rapida e sicura e si sposta efficacemente tra le diverse parti dell'espressione, permettendole di confrontarle tra loro.

Antonio, sebbene sia un esperto utilizzatore della sintesi vocale, ha bisogno di molto più tempo per leggere e analizzare le equazioni e si muove con più difficoltà tra le varie parti dell'espressione. Ascoltare la pronuncia della sintesi vocale, richiede un tempo maggiore e si può ipotizzare che il modo innaturale con cui avviene la verbalizzazione richieda una rielaborazione, che aumenta il carico cognitivo richiesto; quindi, può risultare particolarmente difficile elaborare una visione strutturale dell'espressione, favorendo un'analisi più computazionale. La lettura unidirezionale della sintesi, da sinistra a destra, rende difficile rileggere parti specifiche e notare le possibili semplificazioni; perciò, questo potrebbe favorire un approccio procedurale/manipolativo e, soprattutto, rendere necessario la scrittura di tutti i passaggi, anche quelli che è possibile svolgere a mente, come supporto mnemonico che alleggerisca lo sforzo cognitivo (cfr. Maffia et al., 2023).

[6] Si veda la Tabella 1 presente in Appendice.

Potremmo, dunque, supporre che il modo in cui si accede all'espressione algebrica influisca significativamente nello svolgimento di un quesito algebrico. Nello specifico, la mancanza di una visione globale potrebbe limitare l'uso efficace del senso della struttura: l'uso di lettore Braille e sintesi vocale potrebbero limitare questa abilità. Ne sono un esempio le azioni di Antonio e Monica, che confrontano i singoli termini e difficilmente confrontano espressioni più complesse. In particolare, Antonio fatica ad attivare efficacemente alcune componenti del senso della struttura, proprio quando sono coinvolte espressioni che richiederebbero di prendere in considerazione simultaneamente parti di testo più ampie. Inoltre, la continua rielaborazione mentale richiesta dalla sintesi vocale può portare a preferire una procedura che permetta di elaborare pochi elementi alla volta, riportandoli accuratamente per iscritto, piuttosto che strategie più sintetiche che, in queste condizioni, possono richiedere un eccessivo carico mnemonico per essere eseguite.

7.2. Il Ruolo delle Parentesi

Tutti e tre gli intervistati hanno scelto di svolgere l'equazione C e lo hanno fatto nel modo più strutturale, al contrario dei partecipanti allo studio di Hoch e Dreyfus.[7] Questa differenza può essere dovuta anche a fattori estranei alle disabilità visive, come il livello di istruzione dei partecipanti, che indubbiamente incide sulla capacità di utilizzare e identificare le strutture algebriche, indipendentemente dalla loro forma. Tuttavia, è plausibile che la presenza delle parentesi giochi un ruolo differente nella percezione dei soggetti con disabilità visive, perdendo il ruolo intuitivo che sembra avere nella popolazione generale nell'identificare le sotto-strutture. Le parentesi, in interazione con la vista, settorializzano lo spazio di lavoro. Evidenziando la struttura in esse racchiusa, permettono allo studente di "vedere" la struttura in altre parti del testo. Tuttavia, ciò non accade in queste interviste.

Tutti e tre i partecipanti della nostra ricerca esaminano il contenuto delle espressioni in modo sequenziale e non hanno una visione globale alla prima lettura. Questo approccio potrebbe rendere particolarmente difficile confrontare sotto-espressioni di lunghezza considerevole; dunque, potrebbe risultare più semplice riconoscere singoli termini uguali, piuttosto che le espressioni incluse tra parentesi. Infatti, Monica e Silvano si dicono entrambi consapevoli del ruolo delle parentesi nel delimitare le sotto-espressioni, ma comunque agevolati dalla loro assenza. Tuttavia, potrebbero esserci delle differenze nel modo in cui i due soggetti intendono la funzione delle parentesi: il primo parla di "raggruppare", mentre la seconda di "isolare".

Guardando al caso di Antonio, inoltre, si nota che in presenza delle parentesi

---

[7] Nell'articolo originale, nessuno dei soggetti coinvolti ha svolto l'equazione C usando il senso della struttura e, in generale, si aveva il maggior uso di senso della struttura nella soluzione delle equazioni con due coppie di parentesi.

viene attivato un approccio procedurale-manipolativo e solo dopo diverse manipolazioni si valutano anche gli aspetti più strutturali. In riferimento a quello che Antonio dice, sul ruolo delle parentesi, si capisce che la manipolazione dell'espressione ha un ruolo rilevante. Si può ipotizzare che la memorizzazione (e conseguentemente il confronto) delle sottostrutture difficilmente avvenga durante la "prima lettura", perché tenere a mente tutti gli elementi dell'espressione richiede un carico cognitivo eccessivo, anche per un'espressione relativamente breve. Potrebbe essere fattibile memorizzare solo alcuni termini, ma a priori è difficile immaginare quali possano rivelarsi poi più utili. Perciò, l'idea di memorizzare e confrontare sotto-strutture potrebbe essere una strategia poco efficace in questo contesto e, di conseguenza, poco sviluppata.

Il fatto che gli intervistati rilevino una difficoltà leggermente maggiore può essere dovuto anche alla forma che assumono le parentesi. Nell'uso di lettori vocali o di tavolette Braille, la parentesi può risultare un carattere aggiuntivo che occupa lo stesso spazio (fisico nel caso del Braille oppure temporale per la sintesi vocale) di qualsiasi altro simbolo; al contrario, nella percezione visiva, le parentesi sono rappresentate da segni particolarmente distinguibili, che occupano lo spazio grafico in modo diverso dagli altri simboli e spesso hanno dimensioni adattate a quelle dei termini racchiusi. La loro apparenza contribuisce a veicolare l'idea di un "contenitore" forse più di quanto suggerito dai simboli Braille o dalla lettura della sintesi vocale (Figura 1).

Figura 1
Simboli per Parentesi Tonde Aperte e Chiuse nel Braille a 6 e 8 Punti

Le tecnologie assistive modificano la forma dei simboli e utilizzano diversi mezzi percettivi, questo potrebbe incidere sulla capacità di trasmettere in modo intuitivo i diversi ruoli e significati che possono assumere le parentesi nei contesti algebrici e, quindi, condizionare il ruolo che queste possono avere nel facilitare o meno l'attivazione di processi risolutivi che coinvolgano più efficacemente il senso della struttura.

8. Conclusione

I risultati della nostra ricerca confermano l'idea che le diverse tecnologie assistive influiscano sui processi cognitivi coinvolti nell'apprendimento della matematica, così come del resto è vero in generale per tutte le tecnologie impiegate nel contesto dell'apprendimento e non solo (Verillon & Rabardel, 1995).

I soggetti non vedenti e ipovedenti da noi intervistati fanno affidamento sul proprio senso della struttura mentre risolvono un compito algebrico. Tuttavia, il modo in cui questo avviene dipende anche da quali strumenti digitali vengono usati per accedere al contenuto algebrico.

In particolare, confrontando le strategie risolutive attuate dalle persone da noi intervistate con i risultati riguardanti la popolazione generale riportati in letteratura, emergono alcune differenze riguardo all'uso delle parentesi e alle situazioni che attivano più facilmente il senso della struttura. Confrontando tra loro i tre soggetti da noi intervistati, notiamo che il tipo di tecnologia assistiva che fornisce l'accessibilità può influenzare le strategie risolutive in un problema di tipo algebrico, come è stato messo in particolare evidenza per la sintesi vocale.

Dal punto di vista dell'insegnamento della matematica, notiamo che, almeno nel caso degli studenti con disabilità visive, va riconsiderato il ruolo che le parentesi possono avere nel facilitare il riconoscimento di sotto-espressioni anche considerando che, soprattutto in caso di utilizzo delle sintesi vocali, la risoluzione di espressioni più lunghe e complesse potrebbe inibire, anziché stimolare, l'utilizzo di strategie meno procedurali.

Le nostre osservazioni suggeriscono che l'indagine sugli aspetti cognitivi coinvolti nell'acquisizione di abilità e competenze matematiche andrebbe estesa ad altri ambiti della didattica matematica (e.g. Del Zozzo & Santi, 2023). Soprattutto quando sono coinvolte tecnologie assistive che attivano diversi canali sensoriali, costringendo a dare una forma diversa agli oggetti matematici, gli aspetti metaforici implicati e la loro interpretazione possono esserne fortemente condizionati (Healey & Fernandes, 2011).

Tra gli aspetti cognitivi più rilevanti, soprattutto nell'uso della sintesi vocale, potrebbero esserci quelli legati al carico cognitivo, che non sono stati indagati nel dettaglio in questo studio, perché non previsti nel design di ricerca, ma la cui influenza sembra emergere dall'analisi che abbiamo fatto e dalla discussione che ne è scaturita.

Più in generale, potrebbe essere opportuno considerare la possibilità che le principali difficoltà incontrate dalle persone con disabilità visive nell'apprendimento della matematica consistano nel fatto che vengono dati per scontati concetti e idee influenzati dall'esperienza visiva e, quindi, bisognerebbe porre un'attenzione critica su cosa appaia più o meno intuitivo in presenza di deficit visivo.

Riferimenti

Alajarmeh, N., Pontelli, E., & Son, T. (2011). From "reading" math to "doing" math: A new direction in non-visual math accessibility. In C. Stephanidis (Ed.), *Universal Access in Human-Computer Interaction. Applications and Services* (pp. 501–510). Springer.

Armano, T., Capietto, A., Coriasco, S., Murru, N., Ruighi, A., & Taranto, E. (2018). An automatized method based on LaTeX for the realization of accessible PDF documents containing formulae. In K. Miesenberger & G. Kouroupetroglou, (Eds.), *Computers Helping People with Special Needs* (pp. 583–589). Springer.

Armano, T., Capietto, A., Maietta, D., Manolino, C., & Sofia, A. (2022). Produzione di documenti digitali accessibili con contenuto scientifico: strumenti inclusivi. In R. Bonino, D. Marocchi, M, Rinaudo, & M. Serio (Eds.), *Atti DI.FI.MA 2021 Apprendimento laboratoriale in Matematica e Fisica in presenza e a distanza* (pp. 500–506). Collane@unito.it. Università di Torino.

Ahmetovic, D., Bernareggi, C., Guerreiro, J., Mascetti, S., & Capietto, A. (2019). Audiofunctions. web: Multimodal exploration of mathematical function graphs. In *Proceedings of the 16th International Web for All Conference* (pp. 1–10). https://dl.acm.org/doi/10.1145/3315002.3317560

Bouck, E. C., Weng, P.-L., & Satsangi, R. (2016). Digital versus traditional: Secondary students with visual impairments' perceptions of a digital algebra textbook. *Journal of Visual Impairment & Blindness, 110*(1), 41–52.

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2007). *Research methods in education*. Routledge.del Campo, J. E. F. (2000). *L'insegnamento della matematica ai ciechi*. Biblioteca Italiana per i Ciechi "Regina Margherita" ONLUS.

Del Zozzo, A., & Santi, G. R. P. (2023). L'inclusione in matematica come differenziazione per tutti e per ciascuno: Un'interpretazione semiotica. *CEMeR, 13*(2), 68–79.

Healy, L., & Fernandes, S. H. A. A. (2011). The role of gestures in the mathematical practices of those who do not see with their eyes. *Educational Studies in Mathematics, 77*(2), 157–174.

Hoch, M., & Dreyfus, T. (2004). Structure sense in high school algebra: The effect of brackets. In M. J. Høines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Atti della 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 49–56). IGPME.

Kohanová, I. (2006). *Teaching mathematics to non-sighted students: With specialization in solid geometry* [Unpublished doctoral thesis]. Bratislava.

Linchevski, L., & Livneh, D. (1999). Structure sense: The relationship between algebraic and numerical contexts. *Educational Studies in Mathematics, 40*(2), 173–196. https://doi.org/10.1023/A:1003606308064

Maffia, A., Manolino, C., & Miragliotta, E. (2023). Algebraic structure sense in a blind subject. In M. Ayalon, B. Koichu, R. Leikin, L. Rubel, & M. Tabach (Eds.), *Atti della 46th conference of the international Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 307–314). University of Haifa & IGPME.

Martínez, C. M., Piorno, J. R., Otero, J. J. E., & Mata-García, M. G. (2022). Responsive inclusive design (RiD): A new model for inclusive software development. *Universal Access in the Information Society*, *22*(3), 893–902. https://doi.org/10.1007/s10209-022-00893-9

Marichal, S., Rosales, A., González Perilli, F., Pires, A. C., & Blat, J. (2022). Auditory and haptic feedback to train basic mathematical skills of children with visual impairments. *Behaviour & Information Technology, 42*(8), 1081–1109. https://doi.org/10.1080/0144929X.2022.2060860

Mellone, M., Pacelli, T., & Liljedahl, P. (2021). Cultural transposition of a thinking classroom: to conceive possible unthoughts in mathematical problem solving activity. *ZDM Mathematics Education*, *53*(4), 785–798. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01256-z

Miragliotta, E., Maffia, A., & Manolino, C. (2023). Figural component in geometrical reasoning: The case of a blind solver. In P. Drijvers, C. Csapodi, H. Palmér, K. Gosztonyi, & E. Kónya (Eds.), *Atti del 13th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 4467–4474). Alfréd Rényi Institute of Mathematics and ERME.

Núñez, R. E., Edwards, L. D., & Filipe Matos, J. (1999). Embodied cognition as grounding for situatedness and context in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics, 39*(1), 45–65.

Papadopoulos, I., & Thoma, A. (2022). Mental brackets and their use by high school students in arithmetic and algebra. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *21*(4), 1197–1218. https://doi.org/10.1007/s10763-022-10298-y

Pimm, D. (2002). *Symbols and meanings in school mathematics*. Routledge.

Piroi, M., Manolino, C., Armano, T., Taranto, E., & Capietto, A. (2023). Teacher professional development via a MOOC on assistive technology for visually impaired students learning mathematics. *Journal of Mathematics Education, 16*(1), 59–78. https://doi.org/10.26711/007577152790164

Regola, S. (2023). *Didattica della matematica per persone con disabilità visiva: Tre casi studio per indagare gli aspetti cognitivi* [Unpublished master's thesis]. University of Pavia.

Schweikhardt, W., Bernareggi, C., Jessel, N., Encelle, B., & Gut, M. (2006). LAMBDA: A European system to access mathematics with braille and audio synthesis. In K. Miesenberger, J. Klaus, W. L. Zagler, & A. I. Karshmer (Eds.), *Computers Helping People with Special Needs: 10th International Conference* (pp. 1223–1230). Springer.

Tornavacca, E. (2002). *Matematica, visione e patologie visive* [Unpublished master's thesis]. Università di Torino.

Verillon, P., & Rabardel, P. (1995). Cognition and artifacts: A contribution to the study of though in relation to instrumented activity. *European Journal of Psychology of Education, 10*(1), 77–101. https://www.jstor.org/stable/23420087

Withagen, A., Kappers, A. M., Vervloed, M. P., Knoors, H., & Verhoeven, L. (2013). Short term memory and working memory in blind versus sighted children. *Research in Developmental Disabilities, 34*(7), 2161–2172. https://doi.org/10.1016/j.ridd.2013.03.028

Appendice

Tabella 1

Schema che Riassume la Presenza delle Sei Diverse Abilità Specifiche del Senso della Struttura, all'Interno delle Tre Interviste Analizzate

	Antonio	Monica	Silvano
SS1	Frazioni ed equazioni sono viste come entità; l'espressione fra parentesi è inizialmente trattata in modo operazionale.	Sono trattate come entità frazioni, equazioni ed espressioni tra parentesi.	Sono trattate come entità frazioni, equazioni ed espressioni tra parentesi.
SS2	Sono riconosciute le frazioni già incontrate, le espressioni sono riconosciute dopo la manipolazione, ma non durante la lettura.	Sono riconosciute le analogie tra frazioni, espressioni tra parentesi e anche tra le strutture delle equazioni nel loro complesso.	Sono riconosciute le analogie tra frazioni, espressioni tra parentesi e anche tra le strutture delle equazioni nel loro complesso.
SS3	Sono distinte sotto-strutture quali: frazioni, espressioni tra parentesi, membri dell'equazione.	Sono distinte sotto-strutture quali: frazioni, espressioni tra parentesi, membri dell'equazione.	Sono distinte sotto-strutture quali: frazioni, espressioni tra parentesi, membri dell'equazione.
SS4	Gli aspetti relazionali delle strutture sono chiari nel manipolare le frazioni, meno nel risolvere l'equazione.	Sono sfruttati gli aspetti relazionali quando si semplificano gli opposti e nella risoluzione delle equazioni.	Emergono aspetti relazionali nella risoluzione dell'equazione e nella determinazione del dominio di esistenza.
SS5	È riconosciuta la possibilità di ridurre a comune denominatore delle frazioni e di cancellare termini uguali, ma nella seconda equazione questo avviene dopo la manipolazione interna alle parentesi.	Le manipolazioni più efficaci sono svolte con rapidità e sicurezza, condensando in un'unica fase le considerazioni sulla loro possibilità e utilità.	Le manipolazioni più efficaci sono svolte con rapidità e sicurezza, condensando in un'unica fase le considerazioni sulla loro possibilità e utilità.
SS6	Nella prima equazione sono scelte le manipolazioni più utili, nella seconda equazione sono svolte anche manipolazioni non necessarie.		

You Need a Map to Navigate a Teacher Education Programme: Analyzing the InformalMath Project through Conjecture Mapping

Serve una Mappa per Navigare un Programma di Formazione Insegnanti: L'analisi del Progetto InformalMath attraverso il Conjecture Mapping

Se Necesita un Mapa para Navegar un Programa De Formación de Profesores: Analizar el Proyecto InformalMath mediante el Conjecture Mapping

Raffaele Casi[1] **and Marzia Garzetti**[2]
[1] *Department of Philosophy and Education, University of Turin, Italy*
[2] *Department of Mathematics, University of Genoa, Italy*

Abstract. *This theoretical paper analyzes the InformalMath Project, emphasizing the implementation of Informal Mathematics Education (IME) within teacher education, particularly in the context of non-scientific museums. The project follows the approach of educational design research and makes use of the technique of conjecture mapping to structure the research process. By employing conjecture mapping, the study delineates the connection between teacher education programme characteristics for IME and the expected processes and outcomes. InformalMath stands as a pioneering endeavor in integrating IME principles into teacher education, within the realm of non-scientific museums. Through detailed analysis and the application of conjecture mapping, this paper lays foundational insights into the development of teacher education methodologies for IME.*

Keywords: informal mathematics education, teacher education, educational design research, conjecture mapping, non-scientific museums.

Sunto. *Questo articolo teorico analizza il progetto InformalMath, che lavora all'implementazione dell'Educazione Matematica Informale (EMI) nell'ambito della formazione degli insegnanti, in particolare nel contesto dei musei non scientifici. Il progetto segue l'approccio della educational design research e utilizza la tecnica del conjecture mapping per strutturare il processo di ricerca. Utilizzando il conjecture mapping, lo studio delinea la connessione tra le caratteristiche del programma di formazione degli insegnanti e i processi e i risultati attesi. InformalMath rappresenta un'impresa pionieristica nell'integrazione dei principi dell'EMI nella formazione degli insegnanti, nell'ambito di musei non scientifici. Attraverso un'analisi dettagliata e l'applicazione del conjecture mapping, il presente lavoro pone le basi per lo sviluppo* *di metodologie di formazione degli insegnanti nell'ambito dell'EMI.*

Parole chiave: educazione matematica informale, formazione insegnanti, educational design research, conjecture mapping, musei non scientifici.

Resumen. *Este artículo teórico analiza el proyecto InformalMath, haciendo hincapié en la implementación de la Educación Matemática Informal (EMI) dentro de la formación del profesorado, particularmente en el contexto de los museos no científicos. El proyecto sigue el enfoque de la educational design research y hace uso de la técnica del conjecture mapping para estructurar el proceso de investigación. Mediante el uso del conjecture mapping, el estudio delinea la conexión entre las características del programa de formación del profesorado y los procesos y resultados esperados. InformalMath es una iniciativa pionera en la integración de los principios de EMI en la formación del profesorado, en el ámbito de los museos no científicos. A través de un análisis detallado y de la aplicación del conjecture mapping, este artículo establece las bases para el desarrollo de metodologías de formación del profesorado para la EMI.*

Palabras clave: educación matemática informal, formación del profesorado, educational design research, conjecture mapping, museos no científicos.

1. Introduction

In this theoretical article, we introduce the InformalMath Project, giving a particular focus on the implementation of Informal Mathematics Education (IME) as described by Nemirovsky et al. (2017). IME refers to mathematics activities conducted outside the traditional school environment, yet within spaces intentionally designed to promote mathematical learning.

We characterize teacher education in IME in non-scientific museums as it unfolded during the project, and we show how its development laid the groundwork for the definition of the main characteristics of a teacher education programme promoting IME.

The project developed as an *educational design research* (McKenney & Reeves, 2019), a research approach that is characterized by the aim of solving problems in educational settings through educational interventions while also advancing theoretical understanding of the related phenomena.

In this case, on a theoretical level the research asks how teacher education can be worked on in the context of IME, from the point of view of intervention; on the other hand, it works on the design of professional teacher training from IME activities in non-scientific museums.

In order to clarify the connection between these two interrelated instances, we chose the approach of *conjecture mapping* which is "a systematic tool to visualize practice-based and theory-based goals (conjectures) and how these interrelate" (Deister et al., 2022, p. 2).

This paper aims to outline the project's research trajectory through conjecture mapping, clarifying the connections between the characteristics of the teacher education program for IME, the expectations for its implementation, and the anticipated outcomes. Given the significance of InformalMath as a pioneering endeavor, we anticipate further iterations of the programme: to facilitate these future iterations, a well-communicated theoretical foundation is required, which this paper seeks to establish through conjecture mapping.

Furthermore, in the broader context of IME educator training, it is essential to distinguish which aspects are specific to this programme and which are not. Here, too, conjecture mapping proves to be valuable. We aim to provide clarity on the programme contributions to the field of informal mathematics education, offering a roadmap for both theoretical exploration and practical application. This endeavor not only enhances our understanding of IME within the unique setting of non-scientific museums, but also contributes to the larger discourse on educators' preparation in this domain, helping to promote a vision of knowledge, and mathematics, as a cultural product.

2. Informal Mathematics Education

Over the last few decades, there has been growing interest in mathematics learning activities outside the traditional school setting. Various studies have reported how some students, despite a history of struggling with mathematics in the institutional context of school, have developed mathematical skills in work contexts. This phenomenon is exemplified in the studies by Nunes, Schliemann, and Carraher (Carraher et al., 1982; Nunes et al., 1993), which are part of the so-called *Street Mathematics* or *Everyday Mathematics* research strand. These studies highlight how young street vendors in Recife, Brazil, were able to easily solve arithmetic operations in a market context yet struggled with the same operations when presented in the written form typically used in schools. Similar findings have been reported in studies involving weavers in Mexico (Childs & Greenfiled, 1980) and tailors in Liberia (Lave, 1977). This line of research acknowledges a type of learning that occurs in an unintentional, contingent, and unplanned manner.

While this informs us that meaningful learning in mathematics takes place also in spaces different from formal classroom contexts, it also makes us reflect on the fact that it may be difficult to exploit the effectiveness of learning through everyday mathematics in formal contexts as well, precisely because of its characteristics of being unplanned, unintentional, and contingent. However, it is most likely that the integration of everyday mathematics approach in structured contexts can support formal learning, and perhaps even support the prevention of school failure, due to the inclusive characteristics it inherits from the contingent problem-solving approach. Calculating the price of a certain amount of goods or determining the most appropriate way to sew a dress, weave a carpet or a basket, and so on, can be engaging activities for people who are familiar with the context to which these activities belong and who are intrinsically motivated to solve a certain problem related to it. We refer to the learning that takes place in these contexts as *emergent learning* (Nemirovsky, 2018), where the term emergent has the meaning attributed to it in the theory of complex systems. In this field, it is used to denote certain behaviors of a system that, although well definable, are not easily predictable from the laws governing its components. Emergent learning – a learning "in which spontaneous memories, speculations, and projects of the participants may take center stage regardless of whether they accord with pre-conceived endpoints" (Nemirovsky, p. 403) – always occurs, unlike the learning for a certain purpose defined a priori, which can therefore fail or succeed. Nevertheless, emergent learning can occur according to trajectories that are difficult to predict a priori.

One hallmark of emergent learning pedagogies is their capacity to prioritize participants' spontaneous memories, thoughts, and projects, even when these do not align with preset objectives. Due to their distinctive openness to unexpected directions, absence of predetermined and measurable outcomes, and largely optional participation, these pedagogies face challenges in formal educational settings. However, it is precisely these attributes that render them particularly valuable in the context of "informal mathematics education" (p. 418).

In a chapter of the 'Futuristic Issues' section in the *Compendium for Research in Mathematics Education*, Nemirovsky, Kelton, and Civil characterize IME as occurring in environments that, unlike street or everyday Mathematics, are "intentionally designed to support mathematics learning, whether because they are structured through programs with regular schedules and assigned educators or because they host technologies, tools, or exhibits designed to engage the user with mathematics" (Nemirovsky et al., 2017, p. 970). Furthermore, IME is distinguished from traditional classroom mathematics for three primary reasons:

- (IME-1). The learners' free choice: "for the most part, learners volunteer to participate in them or are relatively free to pursue their own interests once they are in the environment";
- (IME-2). The fluidity of the boundaries between disciplines: "activities may drift from mathematics to art, literature, science, games, technology, and so forth";
- (IME-3). The absence of traditional forms of academic assessment: "Informal mathematics education needs to be documented for the purposes of professional development and collective exchange, but learners are not individually graded with scores" (Nemirovsky et al., 2017, p. 970).

Although the characterization of IME is drawn by difference from street mathematics and classroom mathematics, the goal of IME is not to resolve the disparities between in-school and out-of-school mathematics. Instead, it seeks to cultivate social environments where the mathematical engagement is not rigidly defined by established curricula or textbooks. This approach allows for a more open and creative space, where participants are free to draw from their memories, innovate, make connections, or express their emotions, building a space where emergent learning not only can occur, but is recognized and valued.

In the next section, we provide an example of an IME activity within the InformalMath project (for other examples see Nemirovsky et al., 2017; Kelton & Nemirovsky, 2023).

3. Informal Mathematics Education Workshops in Non-Scientific Museums

Building upon the research foundations of IME and the intricacies of learning outside classrooms, the project InformalMath focuses on applying IME within the distinctive setting of non-scientific museums, where the term 'non-scientific museums' refers to museums beyond those dedicated to science and technology, where the relevance to mathematics may not be as immediately apparent. As we have seen, this specific context allows for a detailed exploration of how IME principles can be integrated into the educational initiatives of cultural institutions, influencing learning experiences and pedagogical methods.

The concept of tapping into the potential of non-scientific museums arose from the participation of the first author in the Next-Land project (www.next-level.it/progetti/next-land-2/). He contributed alongside a team of researchers to the design of IME activities,[1] like the one presented in this section, in four art and history museums located in Turin, Italy (Casi et al., 2022). These activities were aimed at sixth- and seventh-grade students, and were attended by more than 300 students, accompanied by their teachers.

As we have emphasized, Informal Mathematics Education Workshops (IMEW) are crafted in alignment with IME principles, but they are uniquely structured through a robust laboratory character and a particular emphasis on the role of artifacts in both teaching and learning mathematics. The mathematics laboratory is a didactical methodology extensively explored within the Italian research domain of mathematics education (see, for example, Arzarello & Robutti, 2008), that has been described by Anichini et al. (2004) as encompassing not just a physical space, but also a dynamic learning environment where students are proactive, formulate and test hypotheses, design and conduct experiments, engage in discussion to justify their choices, learn to gather data, negotiate and construct meaning, and steer the development of personal and collective knowledge towards both temporary conclusions and new inquiries (p. 49, translated by the authors). These widely studied topics lend themselves to be exploited both in the context of IME and in the context of the

[1] The designers team was composed by Raffaele Casi, Valentina Leo, and Chiara Pizzarelli, under the scientific direction provided by Cristina Sabena.

classroom. Their value in the classroom is well known, but we cannot overlook how the attitude of discovery and the formulation and justification of hypotheses typical of the laboratory leave room for unexpected learning trajectories, fertile ground for the emergent learning valorized in IME, and for a fluidity of boundaries between disciplines.

To further illustrate the concept of IME, let us examine a specific example drawn from the work of the first author (Casi et al, 2022). We present an IMEW (Casi, 2023) designed for the National Museum of the Italian Risorgimento, situated in the historic Palazzo Carignano in Turin, Italy. This is a historical museum that traces the stages of the political unification of the Italian state, starting from the end of the 18th century, up to the birth of the Italian Republic in 1946. The IMEW under scrutiny, titled "Freedom Shall Decrypt" ("Libertà Va' Decrittando", in Italian), draws inspiration from the museum collection. It particularly revolves around the "Cavour's cipher", a significant artifact used for classified communications between King Vittorio Emanuele II di Savoia and his Prime Minister, Camillo Benso Conte di Cavour. This cipher acts as a portal to the fascinating world of cryptography, offering participants a blend of guided tour and workshop. Participants delve into the art of decryption, employing various methods and artifacts to decipher messages, thereby unlocking the narrative of the museum. Techniques include the use of substitution ciphers, such as the "Carbonaro code", Caesar's cipher, and Leon Battista Alberti's disk, alongside steganography and transposition methods like the Spartan scytale. Through decrypting each code, participants reconstruct the critical moments that led to the creation of the Italian state, merging mathematical exploration with historical discovery.

The example of the "Freedom Shall Decrypt" IMEW at the National Museum of the Italian Risorgimento aligns with the criteria for IME as outlined by Nemirovsky et al. (2017). This IMEW is in fact intentionally designed to support mathematical learning within a museum environment, leveraging artifacts and historical narratives to engage participants with mathematics. It incorporates structured activities facilitated by the exhibits and the artifacts of the museum, specifically tailored to explore mathematical concepts through the lens of history, providing a comprehensive and engaging experience that transcends the traditional classroom environment.

During the implementation of the IMEW with the students and teachers involved in the Next-Land project we could observe a general appreciation for the quality of the activities, the richness of the insights provided and the involvement that occurred. Nevertheless, we could not avoid highlighting a potential pitfall: if IME activities, offered as school field trips, are not effectively integrated into the classroom curriculum by teachers, they risk becoming a 'firework' for the students—a momentary delight that swiftly dissipates, leaving only a faint memory and perhaps a tinge of nostalgia.

Driven by the desire to circumvent the transient firework effect and recognizing that a meaningful connection with everyday classroom experiences can enhance the significance of students' experiences during IMEWs, in the autumn of 2021, the first author and Cristina Sabena had the idea of working on teacher education to promote learning that was both related to the design of IMEWs,[2] and to the professional development of teachers in their everyday activities (Casi & Sabena, 2022). This decision stems from the understanding that laboratory-based teaching and the use of artifacts are known to be effective for learning mathematics within school contexts. Furthermore, we assume, following the result related to both IME and street mathematics (Nemirovsky et al., 2017; Nunes et al., 1993), that integrating IMEW into structured contexts can bolster formal learning and potentially help prevent school failure, thanks to its inclusive nature and emphasis on contingent problem-solving. As we have highlighted in this section, professional development on IMEWs aims to promote active, laboratory-based teaching with a focus on artifacts, while also fostering emergent learning in mathematics.

We can now move on to introduce the aim of this paper and the suestions in the following section.

4. Research Questions and Aim

Given the innovative nature of IME activities, especially in the Italian context, there was a lack of a substantial research foundation to underpin the teacher education programme (refer to Carotenuto et al., 2020 for an example). Moreover, Nemirovsky and colleagues (2017) emphasized the importance of investigating training of IME educators: "To the extent that informal education practices differ qualitatively from formal education ones, it is clear that the education of informal mathematics educators needs to follow approaches different from prevalent ones in mathematics teacher education" (Nemirovsky et al., 2017, p. 977).

For this reason, InformalMath is a dual-purpose project: for what concerns teacher education, it is a comprehensive two-year program designed for primary and middle school educators. Its goal is to introduce these teachers to IME and to actively involve them in this area by designing IMEWs in non-scientific museums. From a research standpoint, the project seeks to establish foundational guidelines for creating IME teacher education courses addressing the issue highlighted by Nemirovsky and colleagues (2017).

The second purpose can be further split into two major objectives. Firstly, it aims to lay the foundation for understanding how to implement IME with teachers within non-scientific museums. Secondly, it seeks to develop and

[2] InformalMath was conceptualised, designed and realised by Raffaele Casi and Cristina Sabena, as part of Raffaele Casi's PhD project, under the supervision of Prof. Cristina Sabena. See the website of the project at www.informalmath.unito.it

define the educational methodologies for IME educators. This contributes to the broader research discussion on "vibrant and socially significant IME", marking relevant progress in the field.

In this paper, we focus specifically on the second objective: the definition of educational methodologies for IME educators, and in particular on the definition and foundation of expected processes and outcomes in relation to the characteristics of the teacher education programme InformalMath. As a matter of fact, our research questions (RQs) are the following:

RQ1. How can the expected processes and outcomes of InformalMath be outlined in relation to the development of the teacher education programme?

and, consequently,

RQ2. What foundational elements are crucial for the development of IME teacher education methodologies in the context of non-scientific museums with respect to the expected outcomes?

To help the reader become acquainted with the complexity of the programme and the innovative nature of the topics it covers, and to ensure a comprehensive understanding of its application within the research context, we briefly present and discuss the InformalMath teacher education programme in the next section.

5. InformalMath Teacher Education Programme

The InformalMath programme commenced in December 2021 and was concluded in May 2024. In the programme, the participation to and the development of new IMEWs was used both as a tool and a goal for teacher education, consistently with the first purpose of the project. As a tool, the process of designing new workshops with the teachers provided them with an opportunity to delve into the fundamental concepts of IME. As a goal, their design efforts equipped the museums—and thereby the students in the community—with fresh IMEWs to explore.

The programme was organized into three distinct phases: Phase 1 – Discovery, Phase 2 – Guided Co-Design, and Phase 3 – Scaffolded Co-Design. The programme was designed to progressively guide participating teachers who voluntarily joined the project towards co-design of IMEWs. This approach was inspired by the cognitive apprenticeship model (Collins et al., 1989), which begins with teacher educators playing a significant role that gradually diminishes as teachers increasingly assume more responsibility and autonomy as the programme advances.

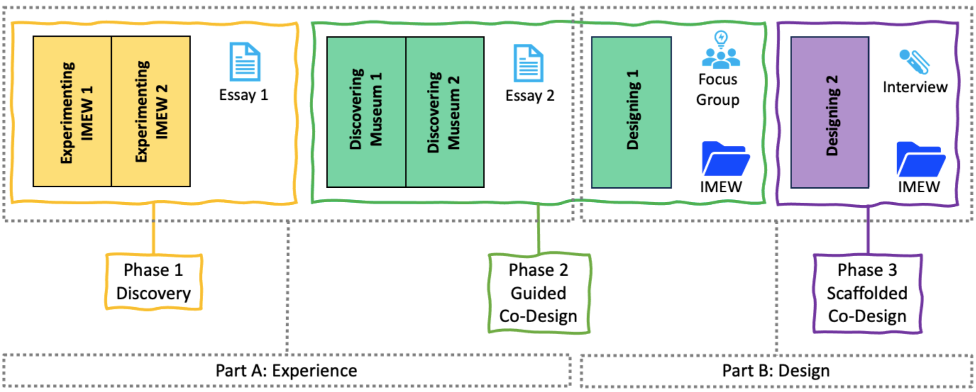
The choice to involve teachers on a voluntary basis was made in accordance with principle IME-1 reported in Section 2, concerning the freedom of choice of participants in informal mathematics education activities. At the same time, principles IME-2, concerning the fluidity of boundaries between disciplines, and IME-3, concerning the absence of traditional forms of evaluation for participating teachers, were also followed. The set of choices thus made InformalMath an informal mathematics education programme for teachers.

Twenty-seven teachers joined the project in Phase 1, of whom 22 continued in Phase 2, and 7 concluded with Phase 3. Such an evident decrease in the number of participants, especially between Phase 2 and Phase 3, can be explained by the long duration – over two and a half years – of the teacher education programme. Indeed, many of the teachers who chose to leave the project reported that they made this choice as a result of personal life changes, such as pregnancies or relocations, or professional changes, such as school or career changes, or because of the demand to take a more central role in school administration, thus having to give up committing considerable time to the design of the IMEWs.

Figure 1 presents a detailed diagram that outlines the organizational structure and main components of the programme.

Figure 1

The Structure of the InformalMath Teacher Education Programme [own figure]



The programme is ideally divided into two parts: part A and part B. Part A is characterized by teachers making experience of IMEWs, of museums, and deepening of mathematical and pedagogical themes. Part B is characterized by the teacher's design of new IMEWs. More specifically, during phase 1 (December 2021 – March 2022), the teachers experienced two of the previously planned IMEWs: 'Freedom Shall Decrypt' at Museo Nazionale del Risorgimento and 'Swirls of Ideas' (Vortici di idee, in Italian), an IMEW on the topic of spirals at the City Museum of Ancient Art, hosted in Palazzo Madama, Turin (for a detailed description of this IMEW see Casi et al., 2022). For two days, two similar activities were proposed, with this structure: experience of the IMEW, personal reflection, discussion, and in-depth study in mathematics and mathematics education. At the end of phase 1, teachers were asked to produce a first essay reviewing the experience: the choice to collect teachers' voices, which characterizes the entire programme, is consistent with emerging learning pedagogies that, as highlighted in Section 2, prioritize participants' voices, even when these do not align with preset objectives.

Phase 2 took place from April 2022 to January 2023 and marks the transition from part A of the course to part B: in the following we describe its sub-phases as phase 2A and phase 2B. Phase 2A aimed at providing teachers with additional tools for the design of new IMEWs. It followed phase 1, with some differences: in two days the teachers first visited two museums (PAV – Parc of Living Art in Turin and Castello di Rivoli Museum of Contemporary Art in Rivoli), then reflected and discussed about the museum's collections and their use for IME and participated in in-depth discussions in mathematics education and pedagogy. At the end of Phase 2A the teachers produced a second essay reviewing the experience. Phase 2B launched the planning in groups, organized along the pattern of successive refinements following the feedback each group received from the teacher educators, other participants, and experienced museum staff. At the end of phase 2, focus groups were organized to review the experience, and the groups delivered the first set of designs.

Phase 3 (February 2023 – May 2024) had a structure similar to the one of phase 2B, with the fundamental difference of a preliminary step in which the teachers were asked to select the museums for which to design IMEWs, giving more agency in the designing process to the teachers. The choice was made for the 'Soundscape Museum' (Museo del Paesaggio Sonoro) in Riva Presso Chieri and the Castle of Moncalieri – Sabaudian residence. Also, at the end of phase 3, the teachers were given the opportunity to review their experience through an individual interview, and the groups delivered the second set of designs.

Now that we have introduced the main elements of the teacher education programme InformalMath, and the objectives behind it, we can describe the research approach behind the InformalMath programme, that of Educational Design Research (EDR): this will help to understand how the research process developed to define the founding characteristics of the teacher education programme and the expectations with respect to these characteristics.

6. InformalMath as an Educational Design Research

The approach of EDR encompasses a broad spectrum of investigations aimed at addressing critical issues within actual educational contexts, whilst simultaneously contributing to theoretical understanding regarding significant phenomena (McKenney & Reeves, 2019; Bakker, 2018). In this case, the addressed issue is the lack of professional development in relation to IME. This need can be found in existing literature on IME (Nemirovsky et al.,2017), but it arose also in the context of the Next-Land project mentioned in Section 3, that promoted the participation of numerous students and teachers in IMEWs, who subsequently showed an interest in learning more about IME.

EDR is characterized by its methodological flexibility: quantitative, qualitative, and mixed-method approaches can be used during the research process (McKenney & Reeves, 2019). Due to a lack of research on the topic of professional development on IME, the present work has an explorative and fundative aim: for this reason it mainly adopts a qualitative approach. A defining feature of EDR is the active involvement of educational practitioners not merely as recipients of research outcomes, but as co-contributors to the cyclical process of design, implementation, and assessment. For what concern the structuring of InformalMath programme the educational practitioners involved were the researchers, in the role of teacher educators, the museum experts, and the participating teachers. The characteristics of the programme have been defined through a work of reflection and analysis that involved all these voices along the way, collected through essays, interviews, or focus groups, as described in Section 5.

We delineate the core attributes of EDR as identified by McKenney & Reeves (2019), and we establish their relevance to the InformalMath project. EDR is distinguished by its:

- Theoretical Orientation: EDR is initiated within a theoretical framework, from which the educational intervention or design is structured. This design is developed and modified coherently, enriching or expanding the initial theory, or enhancing the theoretical understanding of the investigated phenomenon through the reevaluation of various theoretical constructs. Theoretical understanding is augmented not only by empirical results but also by how these results influence the proposed design. From this point of view, we have seen how the InformalMath project attempts to establish guidelines for the creation of IME teacher education courses in non-scientific museums.
- Interventionist Nature: The design proposed in an EDR aims to impact the resolution of problems arising in educational contexts, whether formal or informal. EDR seeks solutions to specific problems, presenting these solutions in the form of design principles related to educational materials, instructional models, professional development pathways, etc. From this perspective, InformalMath is a programme designed for school educators. Its aim is to introduce these teachers to IME and to actively involve them in this area.
- Collaborative Approach: Addressing problems within the complex systems of educational environments necessitates the coordination of various disciplines and professional roles, as well as integrating different perspectives. This ensures that the research process engages multiple participants over time, starting with all those for whom the addressed problem is relevant. To make an example we can refer to the work of Casi and Sabena (2023), where it is shown that the analysis of teachers' reflection about one of the phases of the InformalMath programme significantly

shaped the subsequent phases and the professional development.

- Responsively Grounded: Throughout the research process, advancements may occur on both practical and theoretical levels, necessitating a transformation in the adopted perspective. New information from literature, field interventions, or other sources is processed and utilized to inform subsequent decisions. In the presented project the different actors involved in the research indicated, in successive stages, what the founding elements of the pathway could be: as will be seen below, for example, the structured exchange of feedback between teachers, museum experts, and didactic experts enabled the design of IMEW that were the result of a collective contribution.
- Iterative Process: Due to its responsively grounded nature, EDR is structured around cycles of design, implementation, and evaluation that increasingly involve more participants and greater detail. Each EDR is divided into cycles and sub-cycles, each with distinct objectives and characteristics. We can recognize in the InformalMath programme the first macro-cycle of research, where design principles of the programme are defined and analyzed in a first endeavor of formalizing the main characteristics of a professional development on IME (Figure 2). We describe below the interplay of micro-cycle and meso-cycle in the project.

Figure 2
The Structure of InformalMath as a Research Project [own figure]

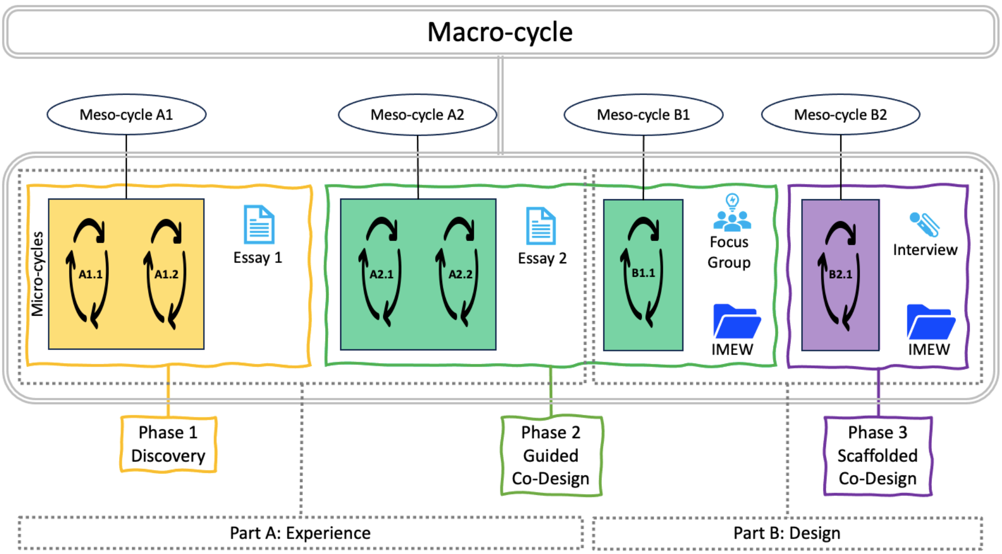


Figure 2 supplements Figure 1 by offering an insight into the research process of the InformalMath project. It illustrates the experiences of teachers in Part A as consisting of four micro-cycles. Each cycle shares a similar format, as detailed previously: a museum visit and immediate impression gathering in the morning collected through an online form, followed by a discussion of these impressions and two in-depth discussions in the afternoon. In micro-cycles A1.1 and A1.2, the museum visits were conducted through IMEW, and the in-depth discussion focused on specific mathematical themes (cryptography and cryptanalysis for A1.1, and spirals along with geometric transformations for A1.2) and mathematics education topics (problem-solving and posing for A1.1, and semiotic mediation of artifacts for A1.2). For A2.1 and A2.2, traditional guided museum tours were conducted, and the in-depth discussion gave insights into mathematics education (orientation and spatial representation for A2.1, and didactic transposition for A2.2) and pedagogical approaches (educational activity planning for A2.1, and multidisciplinary approaches for A2.2).

Part B features two micro-cycles, B1.1 and B2.1, focused on the design of IMEWs, characterized by a consistent structure of small-group design, feedback collection, redesign, presentation to museum experts and other participants for additional feedback, and final design. A distinctive step in micro-cycle B2.1 was each design group selecting a local museum for their IMEW design.

At a meso level, four meso-cycles are identified: A1 and A2 in Part A, and B1 and B2 in Part B, each incorporating the described micro-cycles. A key aspect of each meso-cycle was the collection of participants' voices, where teachers were encouraged to reflect on their experiences, discussing challenges, opportunities, and learnings. Teachers' voice was collected in written form at the end of A1 and A2 through personal essays, and verbally at the end of B1 and B2, using focus groups and individual interviews, respectively. This collection served dual purposes: it informed theoretical understanding by expanding knowledge on teacher education processes and enhanced practical applications by offering insights for designing future meso-cycles.

As discussed before, the entire InformalMath programme is the macro-cycle, which has not been repeated so far, and which constitutes the research subject discussed in this paper.

In order to trace the main elements of the macro-cycle of InformalMath research, it was decided to use a technique known in EDR, that of conjecture mapping. The final revision of the programme was conducted using the conjecture map, prompted by the general need to systematize the approach and ensure its reproducibility in different contexts from that of the first author, and without their supervision. This technique is presented in detail in the following section.

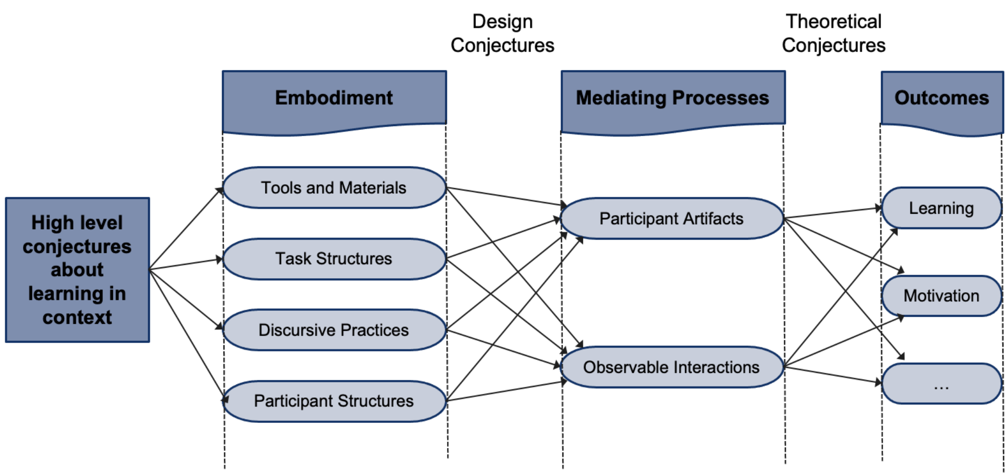
7. Conjecture Mapping in Educational Design Research

Theoretical development and the evolution of interventions in EDR are achieved through iterative cycles of analysis, design, implementation, and evaluation. EDR is thus not merely a methodology, but a genre of research that connects design with associated learning hypotheses, which are explored and validated through the implementation of the design. In other words, in an EDR it is imperative to clarify the relationships between the design and the expected processes, as well as between these processes and the expected outcomes. Sandoval (2014) defines these two kinds of relationships as *design conjectures* and *theoretical conjectures*, respectively. To facilitate the organization of research around these conjectures, Sandoval advocates for the use of the conjecture map, highlighting its role in delineating the foundational structure of the project. Conjecture maps are crafted to delineate hypotheses connecting design features (*embodiment*), *mediating processes*, and the resultant *outcomes* within educational contexts. The process of defining a conjecture map renders the theorization about the interconnections among these elements more transparent. For this reason, it serves not merely as a means of representation, but also as instruments for investigation and reflection. It compels researchers to specify not only the objectives of their design endeavors but also to articulate the anticipated functions of specific design features, how these features are expected to interact, and the outcomes they are intended to generate (ibid.). Conjecture mapping technique has been widely used in educational domains, as well as in mathematics education (e.g. Boalens et al. 2020; Deister et al., 2022; Choppin et al., 2018).

In Figure 3 we present the general structure of a conjecture map as introduced by Sandoval (2014).

Figure 3

General Structure of a Conjecture Map for Educational Design Research [adapted from Sandoval (2014, p. 1), own figure]



The framework of a conjecture map is structured in four columns. The first one is that of *high-level conjectures*. These conjectures are grounded in theoretical understanding of how learning can be supported within a specific context. In this case we will use these conjectures to frame the InformalMath programme. The next column, that of *embodiment*, involves the materialization of the high-level conjectures into tangible design elements. Sandoval proposes four primary categories for *embodiment* within learning environments: tools and materials (such as instruments and resources), task structures (including goals and criteria for tasks), participant structures (defining various roles and responsibilities), and discursive practices related to communication during the intervention. Sandoval himself highlights how these categories are not necessarily present in all cases. The implementation of these design features triggers *mediating processes* (third column), which the author suggests examining through two lenses: as observable interactions within the designed environment and as artifacts created by participants during the intervention. Mediating processes are a key element in the definition of the relation between embodiment and *outcomes* (last column). Sandoval proposes some examples of common outcome categories referring to learning, motivation, etc. *Theoretical conjectures* are the links between mediating processes and expected outcomes, while *design conjectures* structure the relation between embodiment and mediating processes. Sandoval further discusses the challenges in directly correlating mediating processes with learning outcomes, due to the intricate nature of educational practices. Echoing Salomon (1996), he advises against viewing conjecture maps as linear causation models, but rather as frameworks outlining process relationships and patterns of change.

The second author, in one of her previous works (Deister et al., 2022) highlighted how conjecture mapping is not a research method, but a technique for structuring work. The work of Deister and colleagues lists several uses of this technique in EDR, which can be found in the literature: here we refer to two of them. First, the present work wishes to introduce conjecture map to make explicit what processes are expected during the implementation of an educational intervention, highlighting the link with the intervention itself. Secondly, the conjecture map of the project aims to support clarity in the communication of the main assumptions behind the research, supporting the structuring of successive iterations of the intervention, even in contexts different from the initial one.

Furthermore, the map in InformalMath project is intended to link different findings belonging to different phases of the training initiative. The purpose is to maintain coherence in the interpretation and analysis of the data according to the objectives of the educational intervention, that is built over a long period and several phases. Since the conjecture map supports the structuring of the link between course characteristics, processes and expected outcomes, it will allow us to answer the research question RQ1.

In the following section we define the map of the project. We initially focus on the High-Level Conjectures, before moving on to discuss the column related to embodiment, which outlines the main features of the intervention. Subsequently, we describe the remaining columns. Finally, we discuss the design and theoretical conjectures upon which the project is built. This discussion aims to define the foundational elements of IME teacher education methodologies within the context of non-scientific museums, addressing research question RQ2.

8. InformalMath Conjecture Map

We start building the conjecture map related to the InformalMath programme defining the high-level conjecture and showing how this conjecture shapes the embodiment of the intervention. At the end of Section 3 we highlighted how the starting assumption, that we can now call high level conjecture, of the project is that experimenting with and designing IMEWs enables teachers to develop professionalizing skills that can be used in everyday teaching practice: on the one hand because it allows the encounter with educational methodologies considered significant for the teaching of mathematics in the classroom, such as the laboratory (see Section 3), and on the other hand because IME perspective allows to cultivate social environments where the mathematical engagement happens in an open and creative space. We described the main phases of the professional development designed in Section 5, and in Section 6 we highlighted how they relate to different research cycles.

Here we come back again to the structure of the InformalMath programme in order to highlight the characteristics of each phase and structure the embodiment column of the conjecture map. To do so, we summarize the main aspects of the programme and categorize them according to the elements proposed by Sandoval in his original work (2014):

- Task structure:
  - Phase 1: Teachers experience IMEW as students, then discuss the experience and participate in two in-depth discussions, one with a focus on the mathematics and one with a focus on mathematics education;
  - Phase 2: Teachers visit the museum with a focus on planning, then discuss the experience and participate in two in-depth discussions, one on mathematics education and one on pedagogy; later engage in the design work, with exchange of feedback between colleagues, with MathEducation experts and with museum experts;
  - Phase 3: Phase characterized by design work, with exchange of feedback between colleagues, with MathEducation experts and with museum experts.
- Participant structure:
  - Phase 1: Teachers have the role of students: they are active, explore, use the available artifacts working in groups;

  - Phase 2A: Teachers no longer play the role of the students, but explore the museum space with a view to future planning;
  - Phase 2B and 3: Teachers work on the design in small groups, there is a structured feedback exchange between teachers, museum experts, and mathematics education experts.
- Discursive practices: the key feature with regard to this aspect is the choice to give voice to teachers and their perspective at each stage, hence alternating moments of individual and collective reflection, using the following techniques:
  - a short paragraph filled with heartfelt impressions from the experiences;
  - reflective essays composed with objective, analytical insights;
  - focus groups and interviews centered on reflective discussions about design actions.

8.1. Definition of Mediating Processes and Design Conjectures

We can now link each element of the column of the embodiment, described in the previous section, to specific mediating processes. Each association between these two elements, thus between the two columns of embodiment and mediating processes, represents a *design conjecture*. Figure 4 summarizes the elements of the conjecture map described so far: each arrow represents the construction of a design conjecture.

Mediating processes are associated with the active participation of the teacher in interactions with other teachers or artifacts during the workshop or in other phases of the programme: as indicated in Figure 4, this type of activation is expected when the teacher is put in a position to carry out activities with others or with specific artifacts, whether related to participation in the IMEW as a student or to group design with other teachers.

The written reflections, that are part of the embodiment, allow us to observe the shift towards reference to ongoing mathematical processes rather than to objects or topics. Reference to the role of artifacts in the activity or design is also observed in the texts produced. The arrows in Figure 4 show that references to mathematical processes rather than objects are expected mainly in relation to the teachers' experience of IMEW as learners, i.e. when they put themselves in a position to learn as students. The reference to the role of artifacts is instead expected when teachers have to design IMEWs in museums, reflecting precisely on the relationship of artifacts between museum and mathematical knowledge.

Two other elements sought in individual reflections are the reference to the students and their role in the IMEW, which can be associated with learning possibilities, affective factors, involvement and motivation, etc., and the reference to interactions with the museum as a space that educates. The latter aspect is also sought in the designs produced during the course.

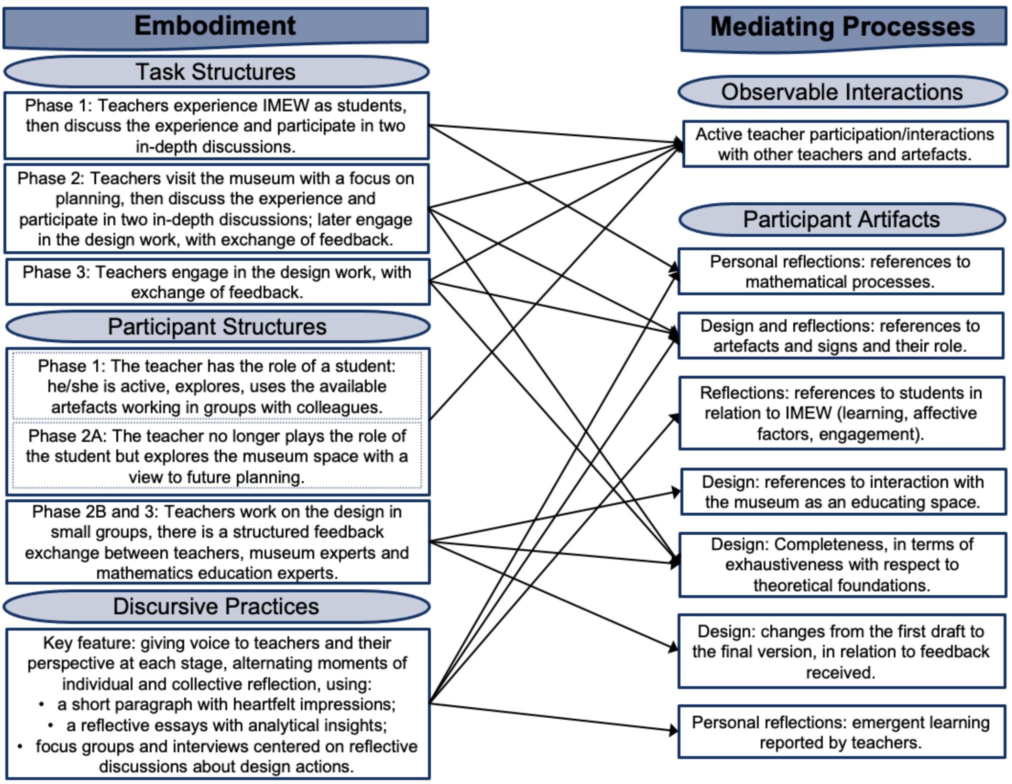
With regard to the IMEW designs produced, completeness is noted with respect to the interaction with the museum, and with the artifacts in play, the activation of mathematical processes, and the description of the phases and working methods considered.

Another relevant aspect in relation to the exchange of feedback are the changes implemented from the first draft to the final version of the IMEW designs, in relation to the feedback received both from colleagues, mathematics education experts, and museum experts.

A transversal aspect, fundamental when working in an IME perspective, are the emergent and unforeseen learnings resulting from the activity performed: for this aspect, reference is made to those learnings explicitly indicated by teachers in personal reflections.

Figure 4

Embodiment and Mediating Processes of InformalMath [own figure]



8.2. Expected Outcomes and Theoretical Conjectures

In this section we present the expected outcomes of the InformalMath programme and we link them to the embodiment through the mediating processes: Figure 5 shows the result of this work.

One of the main general objectives of the programme is to ensure that participants see knowledge, and thus also mathematics, as a cultural product.

Moreover, in the course we work in the direction of promoting the teachers' use of mathematical education experiences as an opportunity for disorientation, with a focus on activating an exploratory approach in students. This is not only in the context of the IMEW, but in general in the classroom context.

If we look at the specific objectives, autonomy in the planning of IMEW is one of the main ones, together with the ability to collaborate with different professional figures with a focus on planning educational activities. As stated in the previous section, working from an IME perspective, it is important to give space to all emergent learning that can appear during the process and that could have not been expected.

Let us make explicit the link between the embodiment, the mediating process, and the first of the outcome addressed: It is the reference to mathematical processes in personal reflections, but also to artifacts and signs and their role in design that is, in the project, associated with a vision of mathematics as a cultural product (see Figure 5). In fact, we move from considering mathematics as a set of static elements to considering it as a set of behaviors, processes, and actions that have crystallized over time, and which can change according to the historical and cultural context of reference.

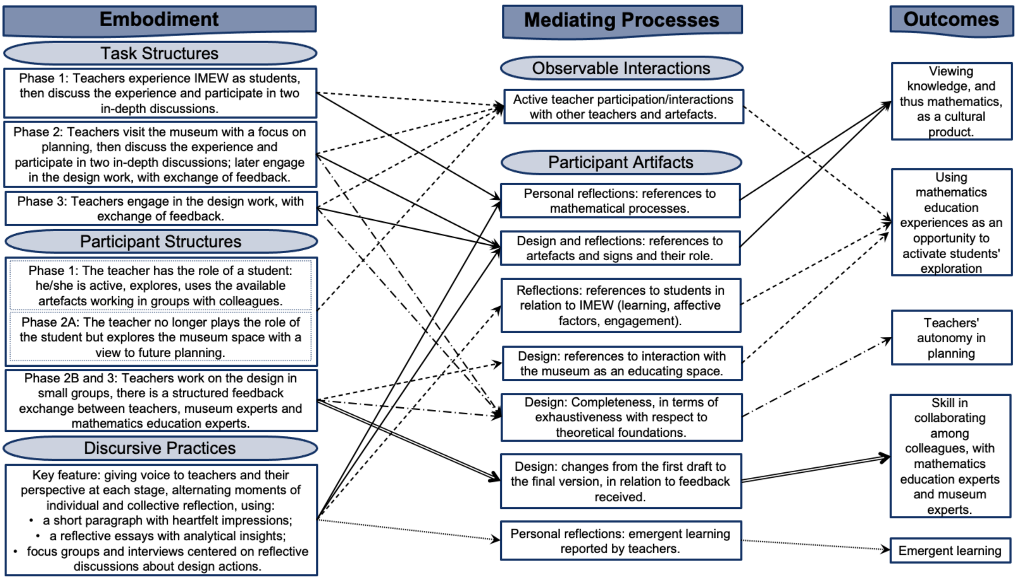
Conversely, considering the role of mathematics education in fostering an exploratory mindset among students, the design phase (described in the embodiment column in Figure 5) emerges as a critical juncture. In this phase, the museum is transformed into a learning environment where there is a focus on creating contextualized activities, and references to these aspects can be found in the teachers' reflections. These activities are structured like workshops and are defined by the deliberate choice of artifacts that enhance the intended mathematical experience. This phase is crucial for establishing a connection between regular school experiences and IMEWs: teachers referring to students during reflective phases, as stated in the mediating process column in Figure 5, highlight the formation of this type of connection, not just in relation to the teacher's personal experience. Another important aspect in supporting students' engagement is the activation experience of the participating teacher. In this context, interactions with others and with artifacts become an indicator, or observable process, of this outcome.

Teachers' autonomy in designing and their ability to collaborate can be identified in the finished products, hence in the designs that the teacher achieves at the end of the course.

It is now possible to complete the conjecture map of the project in Figure 5, and to highlight the trajectories that characterize the research pathway altogether. In order to improve the visibility of the map, we have chosen not to include the starting high-level conjecture, which is described at the beginning of this section.

Figure 5

Conjecture Map of InformalMath [own figure]



9. Discussion

An overview of the map shows how each characteristic of the teacher education programme for IME displayed in the embodiment column is linked to certain (mediating) processes in the programme implementation, which in turn are associated with the expected outcomes. These relationships derive from the theoretical research work presented in this paper, from the programme implementation, and from the analysis of the materials produced, such as, written essays, interviews, and focus groups (Casi & Sabena, 2023; Casi & Sabena, 2024).

As a result, it is possible by navigating the map in Figure 5 to answer research question RQ1 and to lay the foundation for subsequent programme implementations.

Upon closer examination of the map, and adopting a procedure similar to that of Boelens and colleagues (2020), it becomes evident that, starting from the outcomes and tracing back towards the left side of the image, one can identify five distinct trajectories, the tracking of which is facilitated by the different arrow patterns. These trajectories enable us to map the connections between the outcomes and the characteristics of the programme, through specific observables – the mediating processes. These trajectories lay the groundwork for the design and execution of future experimental iterations of the InformalMath macro-cycle. Moreover, they establish, for each phase, the core elements of IME teacher education methodologies in the context of non-scientific museums, thereby addressing RQ2. Now, let’s briefly revisit these five trajectories, resumed in Table 1.

Table 1

Trajectories Highlighted in InformalMath by Conjecture Mapping

Outcomes	Mediating processes	Embodiment
α. Viewing knowledge, and thus mathematics, as a cultural product.	1. References to mathematical processes in teachers' personal reflections. 2. References to artifacts and signs and their role in designs and in personal reflections.	a. (Phases 1 and 2): Visiting experiences in the museums, engaging in in-depth discussions with experts. b. (Phases 2 and 3): Designing IMEWs collaboratively.
β. Using mathematics education experiences as an opportunity to activate students' exploration.	3. Active teacher participation / interactions with other teachers and artifacts. 4. References to students in relation to IMEW in terms of learning, affective factors, and engagement in personal and collective reflections. 5. References to interaction with the museum as an educating space.	c. (Phases 1 and 2): Visiting experiences in the museums, first as students then with a designer's eye, engaging in in-depth discussions with experts. d. (Phases 2 and 3): Designing IMEWs collaboratively, through exchanging feedback and redesigning. e. Reflecting, sharing and discussing their reflections by using different techniques.
γ. Teachers' autonomy in planning.	6. Completeness of the produced designs, in terms of exhaustiveness with respect to theoretical foundations.	f. Visiting museums as IMEWs designers and engaging in in-depth discussions with experts. g. Designing collaboratively IMEWs with exchange of feedback.
δ. Skill in collaborating among colleagues and with experts.	7. Changes from the first draft of the design to the final version, in relation to feedback received.	h. Designing collaboratively IMEWs with exchange of feedback.
ε. Emergent learning.	8. Emergent learning reported by teachers in personal reflections.	i. Reflecting, sharing and discussing their reflections by using different techniques.

We highlight once more the significant role played by the voices of various participants throughout the research process: the mediating processes are defined including insights from museum experts and mathematics education experts, but most importantly, the perspectives of teachers at different stages.

This aspect is relevant in the context of IME: in a context of voluntary participation (IME-1), in which there are no forms of traditional academic assessment (IME-3) and in which emergent learning is to be valued along with expected learning, the participants' voices become a fundamental element for the course designer and for the understanding of its functioning.

Each row in Table 1 shows the identified trajectories that we can read as follow, laying the foundations for the design principles of InformalMath in the form of heuristic statements as proposed by Van den Akker (1999):

Within the context of IME teacher education programme in non-scientific museums, in order to achieve the outcome(s) {α, ..., ε}, observed through the mediating process(es) {1, ..., 8} [and {1, ..., 8}, and {1, ..., 8}], the programme can be structured by {a, ..., i} [and {a, ..., i}, and {a, ..., i}].

As in Nemirovsky's work (2018), we are far from trying to demonstrate "best practices" in IME educators training. We have shared, in an organized form through conjecture map, some experiences within the InformalMath programme, reading them in the light of the considerations on pedagogies of emergent learning.

> For this kind of pedagogy there are no best practices because no concrete attempt can be isolated from the circumstances of its development, the contingencies pervading its daily events, and the life history of the participant individuals and institutions. At most, given historic and contextual aspects, one can discriminate promising or rather-to-be-avoided ways of doing things. (Nemirovsky, 2018, p. 418).

If, as we have already mentioned, the map and the resulting Table 1, are two tools that on the one hand help us to identify what practices might characterize the specific InformalMath teacher education programme, on the other hand they answer question RQ2.

These tools spotlight "promising experiences" or "promising ways" which can be considered in designing teacher education initiatives within non-scientific museum contexts. Indeed, with the aim of achieving identical outcomes {α, …, ε}, observed through the same mediating processes {1, …, 8}, a feasible design strategy would involve adopting the characteristics defined for the InformalMath framework {a, …, i} and adapting them in a manner consistent with the mediating processes {1, …, 8}.

For example, if we consider outcome α, linked to the view of mathematics as a cultural product, it becomes characteristic for an IME approach in teacher education. We can work on the identification of such outcome from the analysis of specific elements in the teachers' written productions (mediating processes 1 and 2), elements that are the result of choices in embodiment: in this case, for example, the teachers' participation in already structured IMEWs (task structures a and b). This aspect of embodiment can be taken up and adapted to other IME contexts, possibly modifying the specific experience, but retaining its fundamental features, such as the use of mathematical artifacts.

10. Conclusion

In summary, this article aimed to shed light on the foundational aspects of the InformalMath project. We started presenting IME (Section 2), as an approach that promotes mathematical engagement in flexible, interdisciplinary environments without traditional grading, empowering learners to freely explore and innovate beyond the confines of structured school curricula. We then presented the InformalMath project, which applies IME principles in non-scientific museums to create dynamic learning experiences that integrate historical artifacts and mathematical inquiry through a laboratory approach (Section 3). In Section 4 we clarified the aim of this work, and we presented in the following sections the InformalMath as it developed as a teacher education programme and as an educational design research (Sections 5 and 6). We chose to refer to the technique of conjecture mapping in section 7 in order to answer, in Sections 8 and 9, to our research questions: using conjecture mapping, we have detailed how the characteristics of the IME teacher education programme influence the expected processes and, consequently, the outcomes of InformalMath. Moreover, we identified foundational elements for developing IME teacher education methodologies within the context of non-scientific museums, thereby laying the groundwork for future experimentation.

Looking forward, the InformalMath project stands as a beacon for future initiatives, signaling the importance of educational frameworks that bridge the gap between formal education and the rich informal teacher education opportunities presented by non-scientific museums. By embracing the complexities and emergent learning opportunities within these environments, we pave a way for an educational paradigm that values creativity, interdisciplinarity, and the active participation of teachers in their own professional development. Overall, the InformalMath Project enhances our comprehension of teacher education within the realm of informal mathematics education working in the direction suggested by Nemirovsky and colleagues (2017). Moreover, it serves as a thoughtful step forward in broadening our perspective on mathematics education. Indeed, the project suggests promising directions for refining teacher education and, consequently, for boosting students' engagement and learning in mathematics via informal and museum-based experiences, though these avenues require further exploration and validation. As we continue to explore these intersections, the insights gained from InformalMath will contribute to the ongoing dialogue on innovation in mathematics education.

References

Anichini, G., Arzarello, F., Ciarrapico, L., & Robutti, O. (2004). *Matematica 2003. Attività didattiche e prove di verifica per un nuovo curricolo di matematica (ciclo* *secondario)* [Mathematics 2003. Teaching activities and testing for a new mathematics curriculum (secondary cycle)]. Matteoni Stampatore.

Arzarello, F., & Robutti, O. (2008). Framing the embodied mind approach within a multimodal paradigm. In English, L. D., & Kirshner, D. (Eds.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp.720–749). Routledge https://doi.org/10.4324/9780203930236

Bakker, A. (2018). *Design research in education: A practical guide for early career researchers*. Routledge. https://doi.org/10.4324/9780203701010

Boelens, R., De Wever, B., & McKenney, S. (2020). Conjecture mapping to support vocationally educated adult learners in open-ended tasks. *Journal of the Learning Sciences, 29*(3), 430–470. https://doi.org/10.1080/10508406.2020.1759605

Carotenuto, G., Mellone, M., Sabena, C., & Lattaro, P. (2020). Un progetto di educazione matematica informale per prevenire la dispersione scolastica [An informal mathematics education project to prevent early school leaving]. *Matematica, Cultura e Società – Rivista dell'Unione Matematica Italiana, 5*(2), pp. 157–172.

Carraher, T. N., Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (1982). Na vida dez; na escola zero: os contextos culturais da aprendizagem da matemática [In life ten; in school zero: the cultural contexts of learning mathematics]. *Cadernos de Pesquisa, 42*, 79–86.

Casi, R. (2024). Exploring the design of informal mathematics workshops in art museums from the teachers' perspective. In L. Björklund Boistrup, B. Di Paola (Eds.), *Proceedings of the CIEAEM 74 conference Mathematics and practices: Actions for futures, "Quaderni di Ricerca in Didattica", Numero speciale* (pp. 481–490).

Casi, R., & Sabena, C. (2022). Informal mathematics experiences in museums: What potential for teacher professional development? In Hodgen, J., Geraniou, E., Bolondi, G., & Ferretti, F. (Eds.), *Proceedings of the Twelfth Congress of European Research in Mathematics Education (CERME12)* (pp. 3065–3066). ERME and Free University of Bozen-Bolzano.

Casi, R., Leo, V., Pizzarelli, C., & Sabena, C. (2022). La matematica nei musei con il progetto Next-Land [Mathematics in museums within the Next-Land project]. In E. Luciano, M. Oggero, & C. Sabena (Eds.), *Atti dell'Associazione Subalpina Mathesis 2020-22* (pp. 105–116).

Casi, R., & Sabena, C. (2023). Informal mathematics in teacher's education: The teachers' voice. In Drijvers, P., Csapodi, C., Palmér, H., Gosztonyi, K., & Kónya, E. (Eds.), *Proceedings of the Thirteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME13)*. (pp. 3353–3360). Alfréd Rényi Institute of Mathematics and ERME.

Casi, R., & Sabena, C. (2024). Mathematics in art and history museums: An informal mathematics education case for teachers' in-service training. *Education Sciences*, 14(5), Article 489. https://doi.org/10.3390/educsci14050489

Childs, C. P., & Greenfield, P. M. (1980). Informal modes of learning and teaching: The case of Zinacanteco weaving. In N. Warren (Ed.), *Studies in cross-cultural psychology* (Vol. 2, pp. 269–316). Academic Press.

Choppin, J., Amador, J., Carson, C., & Callard, C. (2018). Development and use of a conjecture map for online professional development model. In Hodges, T.E., Roy,

G. J., & Tyminski, A. M. (Eds.), Proceedings of the 40th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (pp. 1291-1298). University of South Carolina & Clemson University.

Collins, A., Brown, J. S., & Newman, S. E. (1989). Cognitive apprenticeship: Teaching the crafts of reading, writing, and mathematics. In L.B. Resnick (Ed.), *Knowing, learning, and instruction: Essays in honor of Robert Glaser* (pp. 453–494). Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Deister, F. L., Garzetti, M., & Schlauch, M. (2022). Conjecture maps in practice: Planning, conducting and assessing educational design research. *Bildungsforschung, 2*, 1–16.

Kelton, M. L., & Nemirovsky, R. (2023). Politics and aesthetics of museum mathematics: the dissensual curriculum of early 21st century mathematics exhibitions. *Journal of Curriculum Studies*, *55*(1), 82–104. https://doi.org/10.1080/00220272.2022.2061301

Lave, J. (1977). Cognitive consequences of traditional apprenticeship training in West Africa. *Anthropology & Education Quarterly*, *8*(3), 177–180.

McKenney, S., & Reeves, T. (2019). *Conducting educational design research.* Routledge.

Nemirovsky, R. (2018). Pedagogies of emergent learning. In G. Kaiser, H. Forgasz, M. Graven, A. Kuzniak, E. Simmt, & B. Xu (Eds.), *Invited Lectures from the 13th International Congress on Mathematical Education*. ICME-13 Monographs. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-72170-5_23

Nemirovsky, R., Kelton, M. L., & Civil, M. (2017). Toward a vibrant and socially significant informal mathematics education. In J. Cai (Ed.), *Compendium for Research in Mathematics Education* (pp. 90–101). National Council of Teachers of Mathematics.

Nunes, T., Schliemann, A., & Carraher, D. (1993). *Street mathematics and school mathematics*. Cambridge University Press.

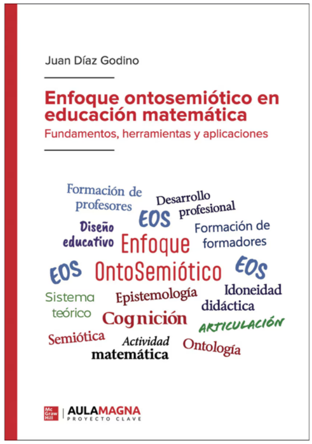
Salomon, G. (1996). Studying novel learning environments as patterns of change. In S., Vosniadou, E., De Corte, R., Glaser, & H., Mandl (Eds.), *International perspectives on the design of technology-supported learning environments* (pp. 363–377). Erlbaum.

Sandoval, W. (2014). Conjecture mapping: An approach to systematic educational design research. *Journal of the learning sciences*, *23*(1), 18–36.

Van den Akker, J. (1999). Principles and methods of development research. In J. van den Akker, R. M. Branch, K. Gustafson, N. Nieveen, & T. Plomp (Eds.), *Design Approaches and Tools in Education and Training* (pp.1–14). Springer.

RECENSIONI E PREFAZIONI

Godino, J. D. (2024). ***Enfoque Ontosemiótico en Educación Matemática: Fundamentos, Herramientas y Aplicaciones.***



Recensione di Bruno D'Amore

Premessa

Ho avuto la fortuna di ricevere questo libro prima della sua pubblicazione ufficiale e definitiva, quando il collega e amico Juan G. lo inviò ad alcuni ricercatori che avevano negli anni dato contributi allo sviluppo della sua creazione scientifica, l'EOS. Letto con attenzione totale d'un fiato e apprezzato per la sua portata senza limiti, nonostante la mole enorme, lo ricevo di nuovo a distanza di mesi, pubblicato in forma definitiva, elegante, ricco. Basta leggere l'indice per capire che siamo di fronte a una bomba culturale di potenza straordinaria. Ma bisogna con attenzione leggere le pagine a una a una …

Juan appartiene al ristretto gruppo di coloro che hanno saputo creare teorie significative, profonde, dalla portata enorme, tali da reindirizzare la ricerca nel nostro campo, quello della Didattica della matematica, su binari nuovi, potenti, significativi, con una visione che si apre su numerosi fronti. Ricordo di aver avuto parte non banale sia nel far conoscere (parecchi decenni fa, almeno 5) la Teoria delle situazioni di Guy Brousseau, e poi di favorire in tutti i modi possibili lo studio teorico e concreto della Teoria della oggettivazione di Luis Radford, almeno da 25 anni, creando numerose occasioni di confronti teorici e di divulgazione, per esempio invitando Luis in Italia ai frequentatissimi convegni da me diretti dal 1986 e in Svizzera (favorendo un celebre incontro di discussione fra lui stesso e Brousseau, che si protrasse ore).

Ora, in questo 2024, credo si possa affermare che sono ben oltre una ventina le teorie significative della Didattica della matematica, quelle di cui ha senso parlare; ho suggerito ai miei migliori allievi di dedicarsi all'impresa di presentarle al pubblico dei giovani ricercatori, già che mi rendo conto che le nuove teorie tendono a far … dimenticare le vecchie (Asenova et al., 2022).

La collaborazione con Juan è sempre stata profondissima e ricca; a partire da decenni fa … non ricordo più quando … Ma nel 2006, quando Luis Radford e io fummo editors di un numero speciale della rivista *Relime* (Messico), decidemmo di comune accordo di chiedere a Juan uno degli articoli (Radford & D'Amore, 2006).

Nel 2005 avevo avuto modo di fermarmi a Granada con Martha Isabel Fandiño Pinilla, ospiti di Juan e di Carmen Batanero, per una serie di attività di grande interesse comune; ma c'era stato qualche anno prima un formidabile incontro a Chivilcoy (Argentina), nel 2003, durante il quale Martha e io avevamo favorito uno scambio di opinioni orali fra Guy e Juan; per esempio, durante un lungo viaggio in bus, i due si erano affrontati (sì, è proprio il caso di dirlo) sul piano teorico e la mia funzione di traduttore non era stata banale (Brousseau parlava sì spagnolo, ma non sempre in maniera del tutto comprensibile). [Va detto che, prima del Covid, si facevano incontri veri, con viaggi, hotel, pasti in comune, formidabili occasioni di scambio personale; il che oramai è raro assai, sempre più raro. Molte volte Juan è venuto a Bogotà per lavorare al nostro fianco, per esempio in occasione di prove finali di dottorato, approfittando per scambiare idee, fare seminari e preparare testi].

A partire dai primi anni 2000, con Juan e talvolta con altri autori, fra i quali Vicenç Font e Martha, scrivemmo vari articoli destinati ad approfondire l'analisi critica del potere della teoria o a farla conoscere a studiosi di altri Paesi; questa attività durò vari anni, anzi: non è mai terminata. Per far ciò erano necessarie riunioni di approfondimento, tra le quali ricordo quella a Santiago di Compostela (2006), noi quattro autori impegnati lì per tesi di dottorato come esperti.

A proposito di tesi, in occasione della discussione del lavoro di uno dei miei migliori allievi dottorali, George Richard Paul Santi, nel marzo 2010 invitai a fare da relatori a Palermo (Italia) sia Juan sia Luis e fu un'occasione fantastica di discussione e approfondimento. Così come il convegno di Santa Marta (Colombia), indetto dalla università la Sabana di Chia, in occasione del quale si pubblicarono Atti molto significativi per i quali chiedemmo un contributo a Juan e ad altri amici (per esempio: Brousseau, Arzarello, Cantoral, Duval, Font, Godino, Llinares, Gagatsis, …).

Altre occasioni di contatto in convegni furono più volte a Luján (Argentina, per esempio nel 2021); a Bologna in occasione di un convegno internazionale che si tenne in mio onore nel 2011 (Sbaragli, 2011); un convegno virtuale a Granada nel 2017, nel quale Martha e io presentammo un'analisi approfondita di alcuni aspetti della EOS che ci appaiono tenuti in considerazione in questo ultimo fantastico libro di Juan; e altri. Moltissimi lavori di Juan sulla EOS sono stati da noi tradotti in italiano, già che la teoria EOS faticava un po' a entrare fra i ricercatori di quella nazione. E infine ricordo un libro scritto da Juan, Martha e da me, pubblicato in italiano nel 2003 e poi in spagnolo in Colombia nel 2008 (D'Amore, Godino, & Fandiño Pinilla, 2008).

Potrei proseguire, ma mi fermo qui; tutto quanto precede è scritto per confermare che la collaborazione sulla e lo studio della EOS è sempre stato prepotente e forte fra noi: Juan (che l'ha elaborata) e noi che ci abbiamo creduto e che abbiamo contribuito nell'analisi critica e nella diffusione.

Così che risulta ora chiaro che, quando abbiamo visto l'indice di questo libro e letto la prima versione, il nostro cuore ha palpitato; non ci sembrava fosse possibile entrare in maggiori e più profondi dettagli di quella che consideriamo una delle teorie più complete e affascinanti dell'intero panorama di ricerca in Didattica della Matematica. Eppure, così è: questo libro di molto approfondisce il lavoro di decenni precedenti proponendo estensioni e analisi inattesi, ma necessari.

A delineare alcuni punti fondamentali di tale teoria, dedicheremo le seguenti pagine, che vanno interpretate come contributo alla diffusione del EOS e come specifico orientamento alla lettura di questo nuovo, potente, profondo, dotto libro.

Cenni generali alla EOS

Da:

Asenova, M., & D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I., & Fúneme Mateus, C. C., & Iori, M., & Santi, G. (2022). *Teorie rilevanti in Didattica della matematica*. Bologna: Bonomo. [Versión en idioma español: (2024). *Teorías relevantes en Educación Matemática*. Prólogo de Rodolfo Vergel. Bogotá: Magisterio].

Con l'accesa discussione sull'insegnamento e l'apprendimento della Matematica negli anni '80, sono nate diverse teorie che hanno affrontato aspetti assai diversi della Didattica della matematica, talmente diversi che apparentemente le differenze epistemologiche e ontologiche assunte da ciascuna le rendevano distanti e inconciliabili. Tuttavia, in Spagna, Godino e Batanero (1994) trovano nella nozione di *significato* un punto di convergenza tra le tante posizioni dell'epoca.

Per Godino e Batanero (1994) l'idea di significato è centrale nella Didattica della Matematica perché è direttamente correlata al problema della comprensione che gli studenti raggiungono degli oggetti matematici. In risposta a ciò, l'Approccio ontosemiotico (EOS) è emerso come un sistema teorico che trova nella posizione pragmatica del significato (Peirce, 1958) un'opportunità di precisione concettuale che, legata ai concetti di pratica e oggetto matematico, consente una descrizione dettagliata dell'insegnamento e dell'apprendimento della Matematica che è compatibile con molteplici teorie sviluppate in questo campo.

La EOS parte dalla definizione di pratica come qualsiasi «azione o manifestazione (linguistica e non) compiuta da qualcuno per risolvere problemi matematici, comunicare la soluzione ad altri, validare la soluzione e generalizzarla ad altri contesti e problemi» (Godino & Batanero, 1994, p. 334). Quel "qualcuno" che sviluppa una pratica matematica può essere una persona o un'istituzione, intendendo quest'ultima come un gruppo di persone impegnate a risolvere un problema. In questo modo, viene dato un ruolo principale al problem solving considerandolo come l'attività che fa emergere significativamente la conoscenza matematica, aggiungendo così una visione antropologica agli approcci teorici in Didattica della Matematica.

Per quanto riguarda gli oggetti matematici, essi sono intesi come entità astratte, cariche di aspetti culturali che emergono con ruoli rappresentativi, strumentali, regolativi, esplicativi e giustificativi nelle pratiche matematiche (D'Amore & Godino, 2007), il che implica che essi abbiano componenti personali e rivelino un dualismo istituzionale. Un oggetto matematico personale è l'emergere del sistema di pratiche personali che un soggetto sperimenta durante il suo processo di apprendimento; mentre l'oggetto istituzionale ha un carattere sociale che corrisponde all'ambito dei problemi in cui è accolto e proposto da un'istituzione (Godino & Batanero, 1994). In tal modo il significato è definito come la corrispondenza che si stabilisce tra un oggetto matematico e il sistema di pratiche in cui esso emerge e del quale fa parte.

Un altro aspetto che l'EOS evidenzia è che la natura culturale delle pratiche matematiche porta con sé la necessità di usare il linguaggio come un mezzo che ci permette di comunicare con gli altri; così che, nell'attività matematica, i processi di interpretazione sono essenziali, intendendo la nozione di funzione semiotica come quel rapporto di dipendenza tra i vari oggetti che emergono e regolano le pratiche matematiche, che consente la modellazione e la descrizione della conoscenza personale e istituzionale degli oggetti matematici.

Proprio in vista della ricerca della modellizzazione delle pratiche matematiche, nell'EOS viene proposta la nozione di processo matematico come sequenza di azioni che si sviluppano nel corso della risoluzione di un problema (Font & Rubio, 2016). La relazione dinamica che si instaura tra oggetti matematici e significati attraverso i processi che si sviluppano in una pratica matematica ci porta a concepire l'apprendimento come l'appropriazione che una persona fa dei significati istituzionali di un oggetto (Godino et al., 2020).

L'applicazione di questa concezione di oggetti, pratiche e significati nell'analisi di specifiche situazioni di apprendimento e insegnamento della matematica ha portato l'EOS a riflettere sulla presenza di ulteriori elementi non riconosciuti in queste dimensioni epistemiche (istituzionali) e cognitive (personali), ampliando le considerazioni del suo sistema teorico con quattro ulteriori sfaccettature: affettiva, mediativa, interazionale ed ecologica. Secondo Godino et al. (2020), grazie a questa estensione, si possono affrontare diverse questioni e considerare diverse componenti della pratica matematica:

- emersione e sviluppo della Matematica (aspetto epistemico), assumendo la visione pragmatica e antropologica precedentemente spiegata;
- i modi di conoscere gli oggetti matematici e che cosa essi significano per un soggetto (aspetto cognitivo), dove la funzione semiotica e la configurazione ontosemiotica (relazioni tra processi, pratiche e oggetti) sono usate per modellare e descrivere pratiche matematiche, oltre che per anticipare i conflitti che uno studente può incontrare;
- il modo di concepire e mettere in relazione insegnamento e apprendimento (aspetto didattico), per il quale la configurazione didattica si propone come strumento di rappresentazione e studio delle relazioni dinamiche fra tre aspetti: (1) le pratiche, gli oggetti e i processi che il docente ritiene necessari per avvicinarsi a un oggetto matematico, (2) il sistema delle funzioni didattiche e i mezzi utilizzati e (3) i fattori cognitivi e affettivi presenti nel processo di apprendimento;

- i fattori e le norme che condizionano, sostengono e regolano le pratiche matematiche (aspetto ecologico), affermando che possono essere di natura sociale o disciplinare e che, attraverso di essi, è possibile riflettere, valutare e modificare le pratiche matematiche per il loro miglioramento;
- le motivazioni, gli interessi, gli atteggiamenti, le credenze e le emozioni sia degli studenti che degli insegnanti (aspetto affettivo), comprendendo che essi inducono e condizionano le pratiche matematiche, motivo per cui sono direttamente correlati al grado di coinvolgimento degli studenti nel processo di insegnamento e apprendimento;
- il tipo di azioni e risorse che dovrebbero essere utilizzate in un processo di insegnamento e apprendimento di uno specifico oggetto matematico (aspetto mediazionale), alludendo all'importanza della disponibilità e dell'uso tempestivo di risorse materiali e temporanee.

Queste sfaccettature che si propongono nell'EOS sono in relazione tra loro e sono destinate a soddisfare le esigenze di descrizione e prescrizione che, secondo Font e Godino (2011), deve affrontare la Didattica della Matematica. Per questo l'EOS, oltre a offrire strumenti di studio per i processi di insegnamento e apprendimento in ogni loro sfaccettatura, offre anche a docenti e ricercatori una serie di criteri che consentono loro di studiare, riflettere, valutare e guidare il miglioramento di tali processi. Questi criteri sono associati a ciascuna delle sfaccettature e si presentano come il risultato di un processo consensuale di riconoscimento dei risultati delle molteplici teorie della Didattica della Matematica, per le quali non sono visti come una guida compiuta o rigida da considerare da parte degli insegnanti, ma si propongono come punto di partenza nella ricerca del consolidamento della Didattica della Matematica come disciplina scientifica ad alto impatto sociale.

È proprio lo studio dei processi di miglioramento dell'apprendimento e dell'insegnamento della Matematica che conduce a uno dei costrutti centrali di EOS, l'idoneità didattica. Per l'EOS, la Didattica della Matematica ha come preoccupazione primaria l'identificazione e lo studio dei problemi e dei fattori che condizionano l'apprendimento della matematica, al fine di fornire soluzioni alternative o migliorative. Per questo propone che, pur non esistendo "classi buone o cattive", sia importante disporre di criteri che permettano di riflettere su ciò che accade in aula e prendere decisioni che portino a pratiche significative per l'apprendimento degli studenti, essendo l'idoneità didattica di un processo di insegnamento e apprendimento lo stato di equilibrio tra i criteri delle sfaccettature di EOS. Questa idoneità è relativa ai fattori contestuali, culturali e storici in cui si inquadrano le pratiche matematiche.

Vogliamo inoltre ricordare, all'interno dell'EOS, i contributi degli ultimi due decenni in relazione alla connessione tra questo sistema teorico e la formazione dell'insegnante di matematica. A questo proposito, l'EOS ha proposto un modello di conoscenze e competenze didattico-matematiche (CCDM) basato su tre dimensioni: (1) didattica, alludendo alle conoscenze degli insegnanti in relazione alle sei facce dell'EOS precedentemente illustrate; (2) Matematica, corrispondente alla conoscenza della matematica, dei suoi problemi, procedure, oggetti e connessioni; (3) obiettivo didattico-matematico, relativo alla conoscenza delle norme e metanorme dei processi di insegnamento e apprendimento, nonché alla valutazione dell'idoneità didattica (Pino-Fan & Godino, 2015).

Il CCDM si propone come un modello a doppia intenzione: da un lato consente lo studio e la descrizione delle conoscenze degli insegnanti e dall'altro fornisce criteri che consentono di determinare i fattori da considerare nella progettazione dei piani di formazione degli insegnanti. In particolare, propongono l'analisi, la progettazione, l'implementazione e la valutazione dei processi di insegnamento e apprendimento attraverso le sfaccettature e i criteri dell'EOS, come una possibilità di gestione delle competenze professionali dell'insegnante di matematica.

Le possibilità di espansione dell'EOS sono molteplici per la sua disponibilità al dialogo e all'interazione con i progressi di tutte le teorie di Didattica della Matematica, naturalmente discutendo e superando le differenze epistemologiche e ontologiche che esistono.

Riferimenti

D'Amore, B., & Godino, J. D. (2007). El enfoque ontosemiótico como un desarrollo de la teoría antropológica en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *10*(2), 191–218.

Font, V., & Godino, J. D. (2011). Inicio a la investigación en la enseñanza de las matemáticas en secundaria y bachillerato. In J. Goñi (Ed.), *Formación del Profesorado. Educación Secundaria* (pp. 9–56). Grao.

Font, V., & Rubio, N. (2016). Procesos en matemáticas: Una perspectiva ontosemiótica. *La matematica e la sua didattica*, *24*(1-2), 97–123.

Godino, J. D., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *14*(3), 325–355.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2020). El enfoque ontosemiótico: Implicaciones sobre el carácter prescriptivo de la didáctica. *Revista Chilena de Educación Matemática*, *12*(2), 3–15.

Peirce, C. S. (1958). *Collected papers of Charles Sanders Peirce. 1931-1935*. Harvard UP.

Pino-Fan, L., & Godino, J. D. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. *Revista Paradigma*, *36*(1), 87–109.

Questo libro

Visto l'enorme successo internazionale della EOS, ma viste anche le diverse interpretazioni che hanno fatto seguito alla sua diffusione, e le altre teorie che sono state create prima e dopo, notevole è la diffusione internazionale della EOS, tanto che considero necessario questo possente lavoro esplicativo del suo creatore, dettagliato, profondo e critico.

Questo nuovo testo di Juan fa spesso riferimento a teorie che non si situano solo alla base della EOS, il che amplia il suo studio, il suo senso e le sue applicazioni. È estremamente rilevante e significativo che vi siano molti riferimenti ad attività matematiche concrete e di vario genere, con esempi espliciti trattati con dettaglio.

La Matematica è presentata con mille sfaccettature diverse, tutte coerenti, ma tali che ciascuna richiede interpretazioni, linguaggi e modalità distinte, che vengono esplicitati e discussi.

Profondo e assai utile è l'analisi delle diverse teorie del significato e delle loro relazioni con la EOS, in particolare, per quanto riguarda me stesso, gli studi di Peirce.

Estremamente interessanti le analisi relative alla teoria del significato in relazione specifica con la Didattica della Matematica.

Essa, la Didattica della Matematica è presentata, discussa e analizzata da moltissimi punti di vista diversi, che non solo sono esaustivi, ma che finalmente danno della Didattica della Matematica il suo senso molteplice e onnicomprensivo, ciò che molte altre teorie non riescono a dare.

A mio avviso sono interessanti non solo le analogie, ma anche e forse soprattutto le differenze che quasi mai si danno a vedere in analoghe occasioni. Anche in questo caso, gli esempi specifici sono calzanti e molto significativi, soprattutto i paragrafi sui numeri naturali, il concetto di funzione e dunque il linguaggio delle relazioni, cardini della educazione matematica in tutto il mondo.

Molto efficace e necessario il paragrafo che porta il nome di: Approccio ontosemiotico al dominio affettivo in Didattica della Matematica, tematica assente in molte altre opere che trattano temi di carattere didattico, ma qui centrale e significativo.

Nel Capitolo 4 si sviluppa una Teoria del progetto educativo in Matematica basata sulla EOS e si prende in esame, come non ho mai visto fare, con dettagli assai specifici e interessanti, la Dimensione normativa in tutti i suoi specifici aspetti (Norme epistemiche, Norme ecologiche, Norme sulle interazioni, Norme mediazionali, Norme cognitive, Norme affettive, Dimensione metanormativa). In tutto il libro sono presi in esame i Criteri di idoneità didattica e la Dinamica di un processo educativo-istruzionale (nelle sottotraiettorie epistemica, istruzionale, cognitiva e affettiva).

Trovo molto efficaci i paragrafi destinati all'analisi delle Perspettive teoriche relazionate con il progetto, temi allo stesso tempo molto concreti ma anche profondamente teorici e analitici.

Fin dalla nascita della teoria EOS, ricordo vennero messi in evidenza aspetti che sono stati oggetto di discussione e che oggi vengono presentati con notevole profondità e dettaglio, qualcosa che Juan chiama Teoria dell'idoneità didattica basata su vari aspetti (epistemico, ecologico, mediazionale, interazionale, cognitivo, affettiva), i quali hanno interesse di per sé ma soprattutto per le loro interazioni, tema che occupa un ruolo centrale in questo libro.

Dicevo sopra, e lo ripeto qua, che Juan presenta sempre in profondità le relazioni della EOS con altre teorie su temi centrali, relazioni talvolta di concordanza almeno parziale, ma non sempre.

Molta attenzione presta Juan al docente, alla sua professionalità, alla consapevolezza del suo ruolo e alla sua formazione, tema anche a me caro che ho affrontato in tante occasioni ma che, in questo libro, riesce a essere non solo tema concreto, pratico, reale, ma anche di profondo carattere teorico.

Ho molto apprezzato il capitolo 7, dedicato al sistema teorico che sottende la EOS, di una profondità culturale enorme, sottile, precisa, scientifica. Fino a proporre l'EOS come quadro teorico di ricerca.

Molto attuale è il tema delle relazioni fra teorie diverse, come cito io stesso in molte ricerche degli ultimi 10 anni e come invito i miei allievi a studiare; dunque, ben vengano i paragrafi concernenti le Concordanze e complementarietà con altre teorie che sono le seguenti: Teoria delle situazioni didattiche, Teoria antropologica in Didattica della Matematica, Didattica della matematica realista, Teoria APOS, Teoria dell'oggettivazione, Programma etnomatematico. Juan non solo coglie le differenze, ma anche le analogie, e ciò da due punti di vista: i loro costituenti e le diversità di uso nella pratica didattica.

Paragrafi finali di prestigio culturale ma anche di generosità intellettuale, quelli destinati a Confronto di teorie secondo la dualità comprensione-uso (uno dei temi più cari a Juan, spesso ricorrente) e questioni aperte all'interno del sistema teorico EOS, come strumento non concluso, in perenne evoluzione. Il che testimonia, a mio avviso, la visione critica e autocritica di estrema forza intellettuale di Juan

Riferimenti

Asenova, M., D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Fúneme Mateus, C. C., Iori, M., & Santi, G. (2022). *Teorie rilevanti in Didattica della matematica*. Bonomo. [Versión en idioma español: (2024). *Teorías relevantes en Educación Matemática*. Prólogo de Rodolfo Vergel. Magisterio].

D'Amore, B., & Godino, J. D. (2007). El enfoque ontosemiótico como un desarrollo de la teoría antropológica en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *10*(2), 191–218.

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (Eds.). (2015). *Didáctica de la matemática. Una mirada epistemológica y teórica*. Ediciones Universidad De La Sabana.

D'Amore, B., Godino, J. D., & Fandiño Pinilla, M. I. (2008). *Competencias y matemática*. Magisterio.

Font, V., & Godino, J. D. (2011). Inicio a la investigación en la enseñanza de las Matemáticas en secundaria y bachillerato. En J. Goñi (Ed.), *Formación del Profesorado. Educación Secundaria* (pp. 9–56). Grao.

Font, V., & Rubio, N. (2016). Procesos en matemáticas. Una perspectiva ontosemiótica. *La matematica e la sua didattica*, *24*(1-2), 97–123.

Godino, J. D., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *14*(3), 325–355.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2020). El enfoque ontosemiótico: Implicaciones sobre el carácter prescriptivo de la didáctica. *Revista Chilena de Educación Matemática*, *12*(2), 3–15.

Peirce, C. S. (1958). *Collected papers of Charles Sanders Peirce. 1931-1935*. Harvard UP.

Pino-Fan, L., & Godino, J. D. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. *Revista Paradigma*, *36*(1), 87–109.

Radford, L., & D'Amore, B. (Eds.). (2006). *Semiotics, Culture and Mathematical Thinking*. Numero espéciale de la revista *Relime* (Cinvestav, México DF., México).

Sbaragli, S. (Ed.). (2011). *La matematica e la sua didattica, quarant'anni di impegno. Mathematics and its didactics, forty years of commitment. In occasion of the 65 years of Bruno D'Amore*. Proceedings of International Conference, October 8, 2011. Department of Mathematics, University of Bologna. Pitagora.

Testi di riferimento

D'Amore, B. (2020). Un estudio del desarrollo de la didáctica de la matemática con los medios teóricos del EOS. En AA. VV. (2020), Memorias del I Simposio de Educación Matemática (I SEM V) "*Educación matemática en tiempo de pandemia*" (Tomo I, pp. 6–11). Universidad Nacional de Luján, Argentina.

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2017). Reflexiones teóricas sobre las bases del enfoque ontosemiótico de la didáctica de la matemática: Theoretical reflections on the basis of the onto-semiotic approach to didactic of mathematics. In J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone, & M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del II Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico*. Granada, 23-26 marzo 2017. ISBN: 978-84-617-9047-0. http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2020). Historia del desarrollo de la didáctica de la matemática: Un estudio realizado con los medios teóricos de la EOS (Enfoque Onto-Semiótico). *Paradigma*, *41*(1), 130-150.

Font, V., Godino, J. D., & D'Amore, B. (2007). An onto-semiotic approach to representations in mathematical education. *For the learning of mathematics*

Font V., Godino, J. D., & D'Amore, B. (2010). Representations in mathematics education: an onto-semiotic approach. *International Journal for Studies in Mathematics Education*. 2, 1, 58-86.

Peres, E., & Siminovich, S. (2024). *L'Armonia dei Numeri Primi: Giochi Matematici e Nuove Simmetrie Creative*. Dedalo.

Recensione di Bruno D'Amore

Ricordo ancora nel 2022 l'angoscia di sapere che il caro amico Ennio Peres, esperto numero uno di giochi matematici, che tante volte aveva scritto prefazioni appassionate per i miei libri, che aveva sempre accettato con entusiasmo di parlare ai convegni da me organizzati per i docenti di matematica, complice nell'idea che i giochi matematici potessero essere materiale didattico da portare in aula, come lui faceva da decenni nelle sue lezioni di matematica, ci aveva lasciato.

Fui invitato a scrivere parole di ricordo, "necrologi" come li si chiama, da alcune riviste. Il che ho fatto, ma con forte dolore.

E poi naturalmente restai in contatto con Susanna, la moglie tanto amata. E così venni a sapere della curiosa e intrigante storia che lega Ennio a Sergio, la matematica alla musica: Ennio, famoso creatore di giochi matematici; Sergio, famoso musicista, direttore e compositore. Il primo con il sogno di saper cantare; il secondo curioso matematico dilettante, innamorato dei numeri primi. Il sogno del primo: arrivare a cantare bene, suonando a tempo; sogno del secondo: far conoscere al mondo della matematica le sue riflessioni personali sui numeri primi, una parte delle quali era stata pubblicata sulla rivista online dell'Università Bocconi di Milano.

Un formidabile e ben noto creatore di giochi matematici con un sogno nel cassetto; un ben noto direttore e compositore musicale con un altro sogno nel cassetto…

Susanna ha rintracciato le carte di Ennio relative a questa storia e ha concordato con Sergio come portare avanti il lavoro che l'editore Dedalo ha poi accolto. Nasce così questo curioso testo, *L'armonia dei numeri primi*, titolo nel quale la parola "armonia" ha un significato assai più profondo e ambivalente del solito…

Il libro consta di due parti: la prima sono appunti di Ennio sui numeri primi intesi soprattutto come curiosità aritmetica e come elementi didattici, oggetti ludici; la seconda sono appunti di Sergio su sue riflessioni aritmetiche sui numeri primi.

Nella parte scritta da Ennio troviamo molte riflessioni su temi aritmetici, alcuni dei quali ben noti, altri mica tanto: primi gemelli, cugini, sexi, additivi, circolari, bifronti, palindromi, permutabili, pluriunitari, troncabili; i numeri primi di Sophie Germain, di Mersenne. E poi vari teoremi e congetture: di Goldbach, di Gilbreath. E varie proprietà, alcune delle quali mi erano note e altre no. E poi c'è la specialità di Ennio, "Giochi con i numeri primi", spesso assai divertenti e tali da stuzzicare l'interesse: metaprimi (ispirati a Lewis Carroll), crucigrammi con numeri primi, vari giochi di magia con i numeri primi, giochi ispirati a Fermat, ai Maya e così via.

Molti di questi giochi sono adatti per stimolare la curiosità dei giovani studenti, spingendoli a riflettere giocando, il che era nello spirito ludico di Ennio, lo è sempre stato. Si ritrova la sua arguzia, la sua fantasia, il suo umore che ci hanno accompagnato per decenni. (Troppo pochi).

Nella seconda parte, quella di Sergio, appaiono vari capitoli ciascuno dei quali riguarda una tematica; aspetti estetici dei numeri primi, sfiorando in qualche caso la numerologia e varie sue curiosità legate ai primi; un capitolo intero basato sui giochi che hanno come protagonisti numeri primi; un dialogo di ispirazione platonica che dibatte vari temi filosofici legati ai numeri primi. Tutto ciò include anche riflessioni matematiche sul tema, riflessioni che hanno come protagonista Sergio, il quale approfitta di questa occasione per indurre qualche matematico professionista, esperto di questi contenuti, a riconoscere le sue analisi e vedere se possono essere accettate come proprietà assai particolari di diverse categorie di numeri primi.

L'occasione, per quanto mi riguarda, è soprattutto quella di offrire un omaggio pubblico al caro amico scomparso, Ennio, al quale mi legano varie avventure culturali creative. Sapere che uno dei suoi ultimi studi abbia in questo modo potuto essere reso pubblico mi commuove e so che ha dato molta felicità a Susanna portarlo a compimento. Un gesto d'amore senza pari.

E trovo divertente, in senso positivo e originale, questo dualismo di sogni, musicale da parte di un matematico giocologo e aritmetico da parte di un musicista professionista.

Come a confermare che queste due discipline hanno davvero qualcosa in comune, attraente ed eterno.

D'Amore, B. (2024). ***Arte, Matematica, Futurismo: Un Racconto tra Scienza e Pittura da Giacomo Balla a Oggi.*** **Pendragon.**

Prefazione di Piergiorgio Odifreddi

Da diversi anni Bruno D'Amore, matematico, dedica molti suoi studi all'arte figurativa, tanto da sostenere nel 1977 l'esame di ammissione all'AICA (Association International des Critiques d'Arte) come critico d'arte. Ricordo il suo libro *Arte e Matematica* che io stesso commentai con una pagina su Repubblica nel 2015. Proprio in questo anno 2024 sono usciti due suoi volumi in una collana da me diretta dedicati all'arte di Raffaello e di Mondrian. Sulla scelta di questi autori, io stesso ho avuto un ruolo…

La linea analitica di D'Amore è sempre la stessa: presentare brevemente gli aspetti artistico - estetici che caratterizzano gli autori, ma poi entrare in dettagli (anche tecnici) sulla matematica che, a volte, è esplicitamente usata consapevolmente da essi, altre volte è invece come nascosta e implicita, ma sempre dominante qualora si voglia proporre dell'autore in questione una lettura interpretativa completa, non banale, profonda (che, spesso, sfugge ai più).

La scelta di Giacomo Balla, per questo volume, mi attrae molto dato che io stesso mi sono cimentato in analisi non tanto estetiche ma matematiche delle sue opere. Per esempio, ho in passato analizzato le difficoltà implicite nel voler rappresentare pittoricamente il movimento su un'unica tela, come cercarono di fare vari esponenti del futurismo, ad esempio nel *Dinamismo di un cane al guinzaglio* di Giacomo Balla, del 1912, o nel *Dinamismo di un ciclista* di Umberto Boccioni, del 1913. Le loro soluzioni richiamano, inconsciamente, quelle dell'arte orientale: in particolare, le raffigurazioni delle divinità Avalokiteshvara e Shiva a molte braccia. E, consciamente, le prime cronofotografie a esposizione multipla: in particolare, la famosa serie di istantanee di Eadweard Muybridge, che nel 1878 mostrarono come un cavallo al galoppo si solleva completamente da terra.

Le espressioni più significative del genere furono ottenute contemporaneamente, nel 1912, da Kazimir Malevic con *L'arrotino* e da Marcel Duchamp col *Nudo che scende le scale*, sempre nel 1912. Nelle parole dello stesso Duchamp, quest'ultima opera è «un dipinto improprio, un'organizzazione di elementi cinetici, un'espressione del tempo e dello spazio attraverso la rappresentazione astratta del movimento».

Per concentrarsi su questo obiettivo, la figura umana viene ridotta a un manichino con i colori del legno. E, per raggiungere lo scopo, il dinamismo viene congelato in una sovraimpressione di istantanee che trasforma il quadro in una sequenza cinematografica o in una fotografia sovraesposta, come quella che la rivista «Life» scattò all'artista stesso quarant'anni dopo, nel 1952, intitolandola appropriatamente *Duchamp che scende le scale*.

D'Amore evidenzia con netta precisione le frasi che soprattutto Balla ma che anche altri futuristi usano per fare riferimento alla matematica, ma lo fa con competenza. Più di uno storico dell'arte mette in rilievo l' "ispirazione matematica" dell'opera di Balla nella sua lunga militanza futurista, cadendo però nell'errore di accettare le frasi dell'artista come fossero pronunciate da uno scienziato. D'Amore invece mostra come si tratti invece di una matematica intesa non come teoria scientifica, ma come ricerca di un ordine razionale, di un'organizzazione formale, della perfezione; si tratta dunque di un modo di interpretare la matematica un po' ingenuo, visto oggi, ma significativo se si pensa alla sua evoluzione, non proprio specifica nel mondo dell'arte, e in quel periodo.

Usando frasi dello stesso D'Amore, è chiaro che si tratta di artisti, poeti e pittori, poco competenti nella matematica come disciplina scientifica, che vogliono far colpo sul pubblico con roboante terminologia pseudoscientifica. Suggeriscono per esempio una matematica che "si basa sull'essenza divina del caso e dell'azzardo", proponendo che alla vita sociale si debba/possa applicare il calcolo delle probabilità, come fosse una novità, azzardata e lungimirante. E suggeriscono agli architetti costruttori di nuove città di usare la "geometria poetica" che viene contrapposta a una "matematica quantitativa", allo scopo di spingere "la Terra fuori della sua orbita" scegliendo come riferimento la Luna al posto del Sole, definito "mediocre stella".

Per interpretare correttamente la presenza matematica nelle opere di questi artisti, D'Amore introduce vari argomenti di matematica davvero profonda, non banalmente scolastica, il che aiuta molto nell'interpretazione delle opere, al di là di quel che gli stessi Autori avevano previsto.

E poi mi sorprende, assumendo il lavoro di Balla e dei tanti altri artisti suoi contemporanei chiamati in causa, per mostrare come la loro lezione, sia in modalità didascalica sia in modalità espressiva, sia stata l'avvio di una tendenza più vicina ai nostri tempi, nella scelta di tematiche specifiche della realizzazione di opere d'arte più moderne o temi di analisi forti. Tanto per fare un esempio semplice, il meno tecnico, Balla decide di realizzare opere dipingendo sulla tela semplici cifre numeriche e chiamandole, per esempio, "Numeri innamorati" (1923); alcuni decenni dopo, appaiono decine di artisti che mostrano di aver appreso la lezione, realizzando opere che seguono la stessa strada, per esempio Robert Indiana (1963), Jasper Johns (1976), Ugo Nespolo (1980), … E questo vale non solo per le cifre, ma per atteggiamenti geometrici, arrivando a citare Dalì, per esempio: costruzioni prospettiche che chiamano in causa la quarta dimensione, rappresentazioni di movimento, …, tutti temi che D'Amore illustra in modo molto profondo anche matematico, e con decine di esempi che stupiscono per l'evidenza che però andava mostrata, per poter essere riconosciuta come base analitica.

Tutto questo nel compiere un altro tratto del percorso che D'Amore persegue da decenni e che contrasta con il pensiero di molti, cioè che la cultura è unica, che non esistono le tanto declamate "due culture", che servono solo a cercare di nascondere l'ignoranza di chi ne possiede una sola.

La Influencia de las Creencias y Concepciones del Docente de Matemáticas en el Desarrollo de una Enseñanza Inclusiva de las Matemáticas

The Influence of the Mathematics Teacher's Beliefs and Conceptions on the Development of Inclusive Teaching in Mathematics

L'influenza delle Convinzioni e delle Concezioni degli Insegnanti di Matematica sullo Sviluppo di un Insegnamento Inclusivo della Matematica

Angélica Lorena Garzón Muñoz pp. 169–188

Manipolazione Algebrica e Disabilità Visive: Tre Studi di Caso a Confronto

Algebraic Manipulation and Visual Impairments: Comparing Three Case Studies

Manipulación Algebraica y Discapacidades Visuales: Comparando Tres Estudios de Caso

Silvia Regola, Andrea Maffia e Carola Manolino pp. 189–208

You Need a Map to Navigate a Teacher Education Programme: Analyzing the InformalMath Project through Conjecture Mapping

Serve una Mappa per Navigare un Programma di Formazione Insegnanti: L'analisi del Progetto InformalMath attraverso il Conjecture Mapping

Se Necesita un Mapa para Navegar un Programa De Formación de Profesores: Analizar el Proyecto InformalMath mediante el Conjecture Mapping

Raffaele Casi and Marzia Garzetti pp. 209–233

RECENSIONI E PREFAZIONI pp. 235–250

La Matematica e la sua Didattica, Anno 32, n. 2, 2024

ISSN 1120-9968